WORKING PAPER

La volatilidad de Fouque-Papanicolaou-Sircar
Propuesta de análisis ergódico

Eduardo Court M.

Profesor de la Escuela de Post Grado de la Universidad

San Martin de Porres

Correo: eduardocourtm@yahoo.es

1.1 Introducción

1.1.1 Notación

En este trabajo estudiaremos un modelo de volatilidad estocástica desarrollado por Fouque-Papanicolaou-Sircar, el modelo es el siguiente:

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma_t X_t dW_t \\ \sigma_t = f\left(Y_t\right) \\ dY_t = \alpha\left(m - Y_t\right)dt + \beta d\widehat{Z}_t \end{cases} \tag{1.1.1}$$

En este modelo:

- X representa el subyacente, X_t su cotización a la fecha t
- μ es el rendimiento instantáneo, se asume constante
- σ_t es el valor a la fecha t de la volatilidad de las cotizaciones del subyacente; mide la intensidad del ruido $\sigma_t X_t dW_t$ al que es sometida la cotización del subyacente.
- W es un movimiento browniano estándar, la volatilidad σ es ella misma un proceso estocástico, función determinista del proceso Y; la función f se define sobre $\mathbb{R}$ y tiene valores estrictamente positivos.
- Y es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck, de media m a largo plazo y de varianza a largo plazo $\dfrac{\beta^2}{2\alpha}$,
- Z es un movimiento browniano estándar eventualmente correlacionado a W; asumimos esta correlación constante y la denominamos ρ, con $\rho \in \left]-1,1\right[$, de forma que $d\left\langle W, \widehat{Z}\right\rangle_t = \rho dt$. Si definimos Z_t por la igualdad $\widehat{Z}_t = \rho W_t + \sqrt{1-\rho^2} Z_t$ entonces W y Z son dos brownianos independientes.

Nos colocamos sobre un espacio probabilístico $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$ premunido de la filtración $\mathcal{F}_t = \sigma\left(W_s, Z_s, 0 \le s \le t\right)$.

Por ejemplo, podemos considerar el espacio $\Omega = C^0\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2\right)$ de funciones continuas a valores en $\mathbb{R}^2$ premunido de su tribu boreliana y de la medida de Wiener sobre esta tribu. En este caso, necesitamos ver un evento puntual ω como una trayectoria $t \to \left(W_t\left(\omega\right), Z_t\left(\omega\right)\right)$. Por otro lado, la filtración $\mathcal{F}_t$ representa la información sobre los dos movimientos brownianos W y Z hasta la fecha t; este es el incremento habitual de la tribu engendrada por los conjuntos de la forma $\left\{\omega \in \Omega \middle\| W_s\right| \le R_1, \left|Z_s\right| \le R_2, 0 \le s \le t\}$.

En todo lo que sigue nos colocamos bajo la hipótesis de ausencia de oportunidad de arbitraje (AOA).

Mas exactamente, suponemos la existencia de una probabilidad $(\Omega, \mathcal{F})$ bajo la cual los precios actualizados de los activos son una martingala local.

1.1.2 Interpretación

La propuesta de Black & Scholes fue de modelizar la dinámica de las cotizaciones X_t del subyacente por la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \qquad X_0 = x \qquad (1.1.2)$$

Típicamente el subyacente es una acción o un índice de la bolsa. En este modelo, σ es una constante estrictamente positiva, es entonces una cantidad independiente del tiempo y de la casualidad, que la llamamos volatilidad. También consideramos un activo sin riesgo X^0 cuyo valor a la fecha t es $X_t^0 = e^{rt}$. Esto nos hace suponer que la tasa de interés de corto plazo es constante e igual a r. La ecuación 1.1.2 tiene consecuencias importantes:

1.- El proceso X es un movimiento browniano geométrico; disponemos de una expresión explícita para X_t:

$$X_t = x \exp\left(\sigma W_t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right) \qquad (1.1.3)$$

Que prueba que el logaritmo de la cotización X_t sigue una ley gaussiana de media $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t$ y de varianza $\sigma^2 t$. Podemos reescribir 1.1.3 bajo la forma $X_t = e^{\mu t} M_t, \quad \text{donde} \quad M_t = \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right)$ es una martingala-$\mathbb{P}$ de media 1.

2.- El mercado es viable y completo

- Existe una sola y solo una probabilidad $\mathbb{P}^*$ bajo la cual el proceso de precios actualizados $\left(e^{-rt} X_t\right)_{t \geq 0}$ del activo de riesgo es una martingala-$\mathbb{P}^*$. Esta probabilidad se llama probabilidad riesgo neutro.
- La evolución del subyacente se escribe $dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t^*, \quad X_0 = x,$
  Donde W^* es un movimiento browniano-$\mathbb{P}^*$
- Toda acción europea de pay off $H \in L^2\left(\mathbb{P}^*, \mathcal{F}_T\right)$, es decir toda opción definida por una variable aleatoria H con $\mathcal{F}_T$ medible y de cuadrados integrables bajo la probabilidad $\mathbb{P}^*$, puede ser simulada: Existe un único portafolio admisible, autofinanciado y descontado, que contiene solo el

activo sin riesgo y el activo con riesgo, cuyo valor en T es H. Además, el valor $V(t)$ de la opción es, bajo la probabilidad riesgo neutro, la esperanza actualizada del flujo terminal H:
$V(t) = \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}H \middle| \mathcal{F}_t\right]\cdot$
Esto es una consecuencia del teorema de representación de las martingalas brownianas, observemos que $\sigma(W_s, 0 \le s \le t) = \sigma(W_s^*, 0 \le s \le t)$
Dicho de otra forma, podemos cubrirnos perfectamente, y eliminar el riesgo, gerenciando dinámicamente un portafolio conteniendo solo el líquido y el subyacente. Observemos que $V(t)$ es independiente de la tendencia de μ.

3.- En el caso particular donde $H = h(X_T)$, con h continua y positiva, el precio de la opción se pone bajo la forma $P(t, X_t)$ con:

$$P(t,x) = \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}h\left(x\exp^{\sigma\left(W_T^*-W_t^*\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}\right)\right] \qquad (1.1.4)$$

La función P es solución de la ecuación de derivadas parciales:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS}(\sigma)P = 0 \\ \forall x > 0, P(T,x) = h(x) \end{cases} \qquad (1.1.5)$$

Donde:

$$\mathcal{L}_{BS}(\sigma) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + r\left(x\frac{\partial^2}{\partial x} - \cdot\right)\cdot \qquad (1.1.6)$$

Además, la cantidad de activo de riesgo a mantener a la fecha t es:

$$a_t = \frac{\partial P}{\partial x}(t, X_t)$$

A esta cantidad se le llama “delta”. Por consiguiente, el portafolio de cobertura contiene:

$$b_t = e^{-rt}\left(P(t,X_t) - X_t\frac{\partial P}{\partial x}(t,X_t)\right)$$

unidades de activo sin riesgo.

4.- El caso de la call corresponde al pay off $h(x) = (x-K)_+$, notamos entonces $P(t,x) = C_{BS}(t,x;K,T;\sigma)$ y

$$C_{BS}(T,x;K;\sigma) = xN(d_+) - Ke^{-r(T-t)}N(d\_) \qquad (1.1.7)$$

donde:

$$\begin{cases} d_+ = \dfrac{\ln\left(\dfrac{x}{Ke^{-r(T-t)}}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \dfrac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t} \\ d_- = \dfrac{\ln\left(\dfrac{x}{Ke^{-r(T-t)}}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \dfrac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t} \end{cases} \qquad (1.1.8)$$

Además, el portafolio de cobertura contiene la cantidad:

$$a_t = N\left(d_+\right)$$

de activos con riesgo. Esto prueba que la igualdad 1.1.7 que nos da el precio de las call bajo el modelo de Black & Scholes da también la descomposición del portafolio de cobertura del activo con riesgo y del activo sin riesgo.

Aclaremos que lo que precede es verdadero si uno permite, que la tasa de interés a corto plazo, llamada también “tasa corta” y la volatilidad dependan del tiempo, y no de la casualidad. Es suficiente reemplazar r por:

$$\bar{r} = \frac{1}{T-t}\int_t^T r_s ds$$

y σ por $\bar{\sigma}$ donde:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma_s^2 ds$$

en las fórmulas 1.1.4; 1.1.5; 1.1.6; 1.1.7 y 1.1.8

El modelo de Black & Scholes sirve de referencia a todos los que practican sobre mercados financieros:

- Es simple: adoptar el modelo y simplemente suponer que las cotizaciones de X tienen trayectorias continuas y con crecimientos relativos independientes y estacionarios.
- Es manejable: Da lugar a fórmulas cerradas para los precios de los call y put y para los deltas correspondientes, es decir para las cantidades de activos con riesgo que debe de contener el portafolio de cobertura.

Sin embargo:

Todos los test estadísticos invalidan la hipótesis logo normal para la cotización del subyacente. En realidad, parece que las colas de distribución son más gruesas que lo previsto en el modelo. Además, las colas de distribución empíricas de $\ln\left(X_t\right)$ son a veces asimétricas.

- Nosotros definimos la volatilidad implícita I con la igualdad $C_{BS}\left(t,x;k,T;I\right) = C^{obs}$

Donde C^{obs} es el precio observado de la call de madurez T y de strike K La definición tiene sentido porque $\sigma \to C_{BS}\left(t,x;K,T;\sigma\right)$ es una doble expulsión de $\mathbb{R}_{+}^{*}$ sobre $\left]\left(x-K\right)_{+},x\right[$. Definido de esta forma, I es una función de t,x,K,T y C^{obs}. Si los precios observados fueran exactamente los precios previstos por el modelo de Black & Scholes, la función $K \to I\left(t,x,K,T,C^{obs}\right)$ sería constante e igual al parámetro σ . O, los datos del mercado hacen aparecer una dependencia en K. La curva empírica $K \to I\left(t,x,K,T,C^{obs}\right)$ se le llama "smile" en referencia a una sonrisa (convexa, decreciente y después creciente).

Seguramente para explicar estos fenómenos hace falta refinar el modelo. Hay varias formas de hacerlo:

Por ejemplo, permitir a las cotizaciones de X_t a tener saltos, o permitir que la volatilidad dependa de t y de x, la única fuente de ruido que queda es el browniano W. Una forma natural de entender el modelo de Black & Scholes es permitir a la volatilidad ser un proceso estocástico gobernado por un segundo ruido modelado por un segundo browniano $\widehat{Z}$ eventualmente correlacionado a W, pero, no perfectamente correlacionado, contrariamente al caso del modelo de Dupire. Conservemos entonces la escritura:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma_t X_t dW_t$$

Pero, σ es ahora un proceso aleatorio dependiente del tiempo y de la casualidad $\left(W,\widehat{Z}\right)$. ¿Como elegir este proceso? Nosotros deseamos que la volatilidad σ_t sea una cantidad medible-$\mathcal{F}_t$ y estrictamente positiva. Así, nos proponemos escribir bajo la forma $\sigma_t = f\left(Y_t\right)$ donde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{+}^{*}$ es una función determinista e Y es un proceso aleatorio con valores reales $\left(\mathcal{F}_t\right)$-adaptados. Nos limitaremos a los procesos Y que son markovianos. Por ejemplo:

- Un proceso markoviano de saltos puros al espacio de estado finito o contable
- Un proceso markoviano de saltos puros al espacio de estado infinito no contable,
- Una difusión markoviana del tipo

$$dY_t = \mu_Y\left(t,Y_t\right)dt + \sigma_Y\left(t,Y_t\right)d\widehat{Z}_t \tag{1.1.9}$$

En lo que sigue nos limitaremos a las difusiones markovianas 1.1.9, y entre ellas a las que posean la propiedad de "retorno a la media", para las cuales:

$$\mu_Y\left(t,y\right) = \alpha\left(m-y\right)$$

El parámetro α se llama “la tasa de retorno a la media” y el parámetro m “la media a largo plazo”. Podemos ver Y_t como la posición a la fecha t de una partícula sometida a una fuerza de retorno de intensidad α que tiene tendencia a retornar a su posición de equilibrio (determinista) m y a una fuerza aleatoria (por ejemplo los choques) modelada por el ruido $\sigma_Y\left(t,Y_t\right)d\widehat{Z}_t$. La elección $\sigma_Y\left(t,Y_t\right)=\beta$ donde β es una constante, corresponde al proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

1.1.3 Que esperamos?

Hay una buena razón para considerar la volatilidad como una cantidad aleatoria; los estudios sobre los rendimientos de las cotizaciones del subyacente permiten estimar la volatilidad y esta muestra como un comportamiento estocástico. Modelar la volatilidad por un proceso estocástico, es de hecho reconocer que cuantificar el riesgo a través de un parámetro de volatilidad constante es actualmente insuficiente para explicar algunos comportamientos del mercado. En particular para explicar la curva smile. Y esta es una modificación profunda y fuerte que permite describir un mercado mucho más complejo que el descrito por Black & Scholes:

- Podemos reproducir las leyes más realistas para los rendimientos; especialmente las colas de las distribuciones son más gruesas que aquellas de las leyes logo normales.
- Podemos hacer estas distribuciones asimétricas correlacionando los ruidos W y $\widehat{Z}$.
- Podemos hacer aparecer el smile

Evidentemente nada es gratis, sobre todo en el mundo de los mercados financieros, y va a ser necesario pagar por algún lado el precio de estas mejoras:

- No podemos observar directamente la volatilidad; estimar los parámetros del modelo $\left(\alpha,m,\beta\right)$ y el nivel actual de la volatilidad son problemas complejos.
- El mercado modelado de esta forma es incompleto: cuando uno trata una opción, no podemos eliminar el riesgo gestando un portafolio conteniendo liquidez y el subyacente. En efecto, la variación infinitesimal del valor de ese portafolio contiene términos en dW_t y en dZ_t que no los podemos anular simultáneamente.

1.2 Precio de una opción europea

1.2.1 Valuación por EDP

En esta parte consideramos la dinámica 1.1.1 y nos interesamos en el precio de una opción europea de vencimiento T_1 y de pay off continuo h; El comprador de una opción de este tipo recibe $h\left(X_{T_1}\right)$ en T_1. La ausencia de oportunidad de arbitraje y la hipótesis markoviana sobre Y nos aseguran la existencia de una función $P^{(T_1)}:\mathbb{R}_+ \mathrm{x} \mathbb{R}_+^* \mathrm{x} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, que asumimos que es suficientemente regular, tal que el precio de esta opción a la fecha $t \in [0, T_1]$ se escribe $P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t)$. Es imposible anular el riesgo únicamente con el activo subyacente. También consideraremos un portafolio que contiene a_t unidades de activo de riesgo, b_t unidades de activo sin riesgo y c_t opciones europeas de vencimiento $T_2 > T_1$ y de igual pay off h. Nosotros buscamos encontrar unos a_t, b_t y c_t que repliquen la opción y que esta sea autofinanciada. La hipótesis de réplica corresponde a la igualdad:

$$P^{(T_1)}\left(T_1, X_{T_1}, Y_{T_1}\right) = a_{T_1} X_{T_1} + b_{T_1} e^{rT_1} + c_{T_1} P^{(T_2)}\left(T_1, X_{T_1}, Y_{T_1}\right) \quad \mathbb{P}\text{ - } ps \qquad (1.2.1)$$

Y la hipótesis de autofinanciamiento tiene:

$$dP^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) = a_t dX_t + b_t d^{(rt)} + c_t dP^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) \qquad (1.2.2)$$

La ausencia de oportunidad de arbitraje, 1.2.1 implica que a cualquier fecha $t \leq T_1$

$$P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) = a_t X_t + b_t e^{rt} + c_t P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) \quad \mathbb{P}\text{ - } ps \qquad (1.2.3)$$

Es decir que el valor del portafolio es en todo momento igual al precio de la opción. Por la fórmula de Ito tenemos:

$$\begin{aligned}
dP^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) &= \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial t}(t, X_t, Y_t)\,dt + \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t)\,dX_t \\
&+ \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t)\,dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P^{(T_1)}}{\partial x^2}(t, X_t, Y_t)\,d\langle X\rangle_t \\
&+ \frac{\partial^2 P^{(T_1)}}{\partial x \partial y}(t, X_t, Y_t)\,d\langle X, Y\rangle_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P^{(T_1)}}{\partial y^2}(t, X_t, Y_t)\,dY_t \\
&= \mathcal{A}_1 P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t)\,dt + \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t)\,dX_t + \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t)\,dY_t
\end{aligned}$$

Donde $\mathcal{A}_1$ es el operador definido por:

$$\mathcal{A}_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}x^2 f(y)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho\beta x f(y)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Pero, de acuerdo a la hipótesis de autofinanciamiento, la variación infinitesimal del valor del portafolio es también igual a:

$$dP^{(T_1)}(t, X_t, T_t) = a_t dX_t + b_t d\left(e^{rt}\right) + c_t dP^{(T_2)}(t, X_t, T_t)$$

$$a_t dX_t + rb_t e^{rt} dt + c_t \left(\mathcal{A}_1 P^{(T_2)}(t, X_t, T_t) dt + \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial x}(t, X_t, T_t) dX_t + \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial y}(t, X_t, T_t) dY_t \right)$$

$$= \left(c_t \mathcal{A}_1 P^{(T_2)}(t, X_t, T_t) + rb_t e^{rt} \right) dt + \left(a_t + c_t \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial x}(t, X_t, T_t) dX_t \right) + c_t \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial y}(t, X_t, T_t) dY_t$$

Hay términos en dZ_t y, en dY_t, de modo que la identificación de los términos en dZ_t da:

$$c_t = \frac{\dfrac{\partial P^{(T_1)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t)}{\dfrac{\partial P^{(T_2)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t)}$$

La identificación de los términos en dW_t nos da:

$$a_t = \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) - c_t \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t)$$

De donde deducimos:

$$b_t = e^{-rt}\left(P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) - a_t X_t - c_t P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) \right)$$

Finalmente, la identificación de los términos en dt nos da:

$$\mathcal{A}_1 P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) + \mu X_t \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) + \alpha(m - Y_t) \frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t)$$

$$= c_t \mathcal{A}_1 P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t) + rb_t e^{rt} + \mu \left(a_t + c_t \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial x}(t, X_t, Y_t) \right) X_t$$

$$+ \alpha(m - Y_t) c_t \frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t)$$

Que se escribe también reemplazando a_t, b_t y c_t por sus expresiones:

$$\left(\frac{\partial P^{(T_1)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t) \right)^{-1} \mathcal{A}_2 P^{(T_1)}(t, X_t, Y_t) = \left(\frac{\partial P^{(T_2)}}{\partial y}(t, X_t, Y_t) \right)^{-1} \mathcal{A}_2 P^{(T_2)}(t, X_t, Y_t)$$

donde:

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + r\left(x \frac{\partial}{\partial x} - \cdot \right)$$

Dicho de otra forma, si definimos el operador $\mathcal{U}$ por:

$$\mathcal{U} = \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{-1} \mathcal{A}_2$$

entonces:

$$\mathcal{U}P^{(T_1)}\left(t, X_t, Y_t\right) = \mathcal{U}P^{(T_2)}\left(t, X_t, Y_t\right)$$

Como el miembro de la izquierda depende de T_1 pero no dé T_2 y que el miembro de la derecha depende de T_2 pero no de T_1, los miembros son independientes de T_1 y de T_2. El operador $\mathcal{U}$ anula la dependencia al vencimiento. Existe entonces una función $\psi : \mathbb{R}_+ \mathrm{x} \mathbb{R}_+^* \mathrm{x} \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, sea cual sea su vencimiento $T > 0$, tiene una opción de pay off h a un precio $P^{(T)}\left(t, X_t, Y_t\right)$ que verifica

$$\mathcal{U}P^{(T)}\left(t, X_t, Y_t\right) = \psi\left(t, X_t, Y_t\right)$$

De ahora en adelante consideraremos la opción de pay off h y de vencimiento T. Su precio $P\left(t, X_t, Y_t\right)$ verifica la ecuación:

$$\mathcal{A}_2 P\left(t, X_t, Y_t\right) - \psi\left(t, X_t, Y_t\right) \frac{\partial P}{\partial y}\left(t, X_t, Y_t\right) = 0 \qquad (1.2.4)$$

Por razones que se aclararán pronto, introducimos la función $\wedge$ y γ definidas por:

$$\psi\left(t, X_t, Y_t\right) = \beta \wedge \left(t, X_t, Y_t\right) - \alpha\left(m - y\right) \qquad (1.2.5)$$

y

$$\wedge\left(t, X_t, Y_t\right) = \rho \frac{\mu - r}{f\left(y\right)} + \sqrt{1 - \rho^2}\, \gamma\left(t, X_t, Y_t\right) \qquad (1.2.6)$$

Con estas definiciones reescribimos la ecuación 1.2.4, omitiendo la dependencia en $\left(t, X_t, Y_t\right)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} X_t^2 f\left(Y_t\right)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \rho\beta X_t f\left(Y_t\right) \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$
$$r\left(\left(X_t\right) \frac{\partial P}{\partial x} - P \right) + \alpha\left(m - Y_t\right) \frac{\partial P}{\partial y} - \beta \wedge \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Esta igualdad es verdadera, el precio P es la solución de la ecuación de derivadas parciales:

$$\mathcal{L}_{BS}\left(f\left(y\right)\right) + \mathcal{L}_{OU} + \mathcal{L}_1\big) P\left(t, x, y\right) = 0$$

Con la condición terminal:

$$P(T,x,y)=h(x)$$

donde:

$$\mathcal{L}_{BS}\left(f(y)\right)=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}x^2 f(y)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+r\left(x\frac{\partial}{\partial x}-\cdot\right)$$

es el operador Black & Scholes (BS) del parámetro de volatilidad $f(y)$,

$$\mathcal{L}_{OU}=\frac{1}{2}\beta^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\alpha(m-y)\frac{\partial}{\partial y}$$

que es el generador infinitesimal del proceso de Ornstein-Uhlenbeck, y

$$\mathcal{L}_1=\rho\beta x f(y)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-\beta\wedge(t,x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

es un operador que hace intervenir la correlación ρ de una parte, en factor de la derivada cruzada, y la función $\wedge$ de otra parte. Esta última es llamada “prima de riesgo de volatilidad”. Mas exactamente, la función $\frac{\mu-r}{f}$ es exactamente la prima de riesgo relacionada a la primera fuente de ruido W, y γ es exactamente la prima de riesgo relacionada a la segunda fuente de ruido Z. En efecto, una variación infinitesimal del precio de la opción se escribe usando la ecuación 1.2.7 y la fórmula de Ito:

$$\begin{aligned}
&dP(t,X_t,Y_t)\\
&=\left\{rP+\frac{\mu-r}{f(Y_t)}\left(X_t f(Y_t)\frac{\partial P}{\partial y}+\beta\rho\frac{\partial P}{\partial y}\right)+\gamma(t,X_t,Y_t)\beta\sqrt{1-\rho^2}\frac{\partial P}{\partial y}\right\}dt\\
&+\left\{X_t f(Y_t)\frac{\partial P}{\partial x}+\beta\rho\frac{\partial P}{\partial y}\right\}dW_t+\left\{\beta\sqrt{1-\rho^2}\frac{\partial P}{\partial y}\right\}dZ_t
\end{aligned}$$

La función $\wedge$ agrega las primas de riesgo relacionadas a dos fuentes independientes de causalidad a través de la ecuación 1.2.6. Ahora se puede entender porque es mejor escribir la función ψ bajo la forma 1.2.5-1.2.6.

1.2.2 Interpretación probabilística

Lo que buscamos ahora es de dar una interpretación probabilística del precio $P(t,x,y)$. Hagamos:

$$\begin{cases} \theta_t^W = \dfrac{\mu - r}{f(Y_t)}, \\ \theta_t^Z = \gamma(t, X_t, Y_t), \end{cases}$$

y

$$M_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s^W dW_s - \int_0^t \theta_s^Z dZ_s - \frac{1}{2}\left(\left(\theta_s^W\right)^2 + \left(\theta_s^Z\right)^2 \right) ds \right).$$

Bajo ciertas condiciones técnicas, por ejemplo, bajo la condición Novikov:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \left(\left(\theta_s^W\right)^2 + \left(\theta_s^Z\right)^2 \right) ds \right) \right] < \infty, \qquad (1.2.8)$$

M es una martingala-$\mathbb{P}$. Definimos ahora una medida de probabilidad $\mathbb{P}^{*(\gamma)}$ planteando:

$$d\mathbb{P}^{*(\gamma)}(\omega) = M_T(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

Esta nueva probabilidad es equivalente a $\mathbb{P}$ y, de acuerdo al teorema de Girsanov, los procesos:

$$W_t^* = W_t + \int_0^t \theta_s^W ds$$

y

$$Z_t^* = Z_t + \int_0^t \theta_s^Z ds$$

son dos movimientos-$\mathbb{P}^{*(\gamma)}$ brownianos independientes. Tenemos

$$xX_t = \mu X_t dt + f(Y_t) X_t dW_t$$

$$= \mu X_t dt + f(Y_t)\left(dW_t^* - \frac{\mu - r}{f(Y_t)} dt \right)$$

$$= rX_t dt + f(Y_t) X_t dW_t^*$$

y

$$dY_t = \alpha(m - Y_t) dt + \beta d\hat{Z}_t$$

$$= \alpha(m - Y_t) dt + \beta\left(\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2} dZ_t \right)$$

$$= \alpha(m - Y_t) dt + \beta\rho\left(dW_t^* - \frac{\mu - r}{f(Y_t)} dt \right)$$

$$+\beta\sqrt{1-\rho^2}\left(dZ_t^* - \gamma(t, X_t, Y_t) dt \right)$$

$$= \left(\alpha(m - Y_t) - \beta \wedge (t, X_t, Y_t) \right) dt + \beta\left(\rho dW_t^* + \sqrt{1-\rho^2} dZ_t^* \right).$$

si ponemos

$$\widehat{Z}_t^* = \rho W_t^* + \sqrt{1-\rho^2} Z_t^*$$

Definimos un movimiento browniano $\mathbb{P}^{*(\gamma)}$ y nos permite escribir la dinámica 1.1.1 bajo la forma:

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt + \sigma_t X_t s W_t^* \\ \sigma_t = f\left(Y_t\right)(13.2.9) \\ dY_t = \left\{\alpha\left(m - Y_t\right) - \beta \wedge \left(t, X_t, Y_t\right)\right\} dt + \beta d\widehat{Z}_t^* \end{cases}$$

Bajo la probabilidad $\mathbb{P}^{*(\gamma)}$, el proceso de precios actualizados $\left(\widetilde{X}_t\right)_{0 \le t \le T}$ definido por:

$$\widetilde{X}_t = e^{-rt} X_t$$

es una martingala local. Nos colocaremos bajo la hipótesis que asegura que $\mathbb{P}^{*(\gamma)}$ es una verdadera martingala. Por ejemplo, podemos suponer:

$$\mathbb{E}^{*(\gamma)}\left[\int_0^T f\left(T_t\right)^2 X_t^2 dt\right] < \infty \qquad (1.2.10)$$

o igualmente

$$\mathbb{E}^{*(\gamma)}\left[\sqrt{\int_0^T f\left(T_t\right)^2 X_t^2 dt}\right] < \infty \qquad (1.2.11)$$

Entonces si evaluamos la opción europea de madurez T y de pay off $H = h\left(X_T\right)$ por:

$$V_t = \mathbb{E}^{*(\gamma)}\left[e^{-r(T-t)} h\left(X_T\right) \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

eliminamos toda posibilidad de arbitraje. El enorme inconveniente de este modelo de volatilidad estocástica, comparado con el de Black & Scholes, es que a cada función $\gamma\left(t, x, y\right)$ le corresponde una probabilidad riesgo neutro $\mathbb{P}^{*(\gamma)}$. Podemos adoptar el punto de vista siguiente: el mercado selecciona de manera natural una prima de riesgo de volatilidad γ ya sea que se trate de medir el comportamiento histórico de las cifras y/o el conjunto de precios de opciones en el mercado. Para hacer eso, lo más razonable es asumir que γ es una constante, después considerar que γ solo depende de y, o eventualmente de t y de y. En este último caso, en efecto, la dinámica de Y sigue siendo autónoma, en el sentido que la dinámica de X no interfiere con la de Y. Esto es sin duda un problema difícil. Retengamos a priori que existen una infinidad de γ posibles, a las cuales les corresponden una infinidad de probabilidades de riesgo neutro equivalentes $\mathbb{P}^{*(\gamma)}$. Esta propiedad es característica de un mercado incompleto.

Resulta razonable, estando dada la interpretación financiera de $\wedge$, de considerar solo las funciones $y \to \wedge(y)$ delimitadas. Mirando la ecuación 1.2.9, la prima de riesgo $\wedge$ solo interviene en el término de la derivada de Y donde ella se ajusta al término $\alpha(m-Y_t)$ que no está delimitada. Entonces es legítimo pensar que $\wedge$ juega en segundo orden. Así, luego de las simulaciones numéricas, no consideramos el caso de $\wedge \equiv 0$.

1.3 Análisis asintótico

La idea principal de Fouque-Papanicolaou & Sircar es de considerar:

- De una parte, que la volatilidad posee la propiedad de retorno a la media, que se modela con la fuerza de retorno determinista $\alpha(m-Y_t)dt$.
- De otra parte, que ese retorno a la media es rápido. Suponemos que la intensidad α de la fuerza de retorno es grande. ¿Grande frente a qué? α es la inversa del tiempo. Se trata de comparar $\in = 1/\alpha$ (tiempo característico de retorno a la media) a la escala de tiempo del problema: $T-t$. Así consideraremos que $\in \ll T-t$ o, de manera equivalente, que $\alpha \gg (T-t)^{-1}$.

La idea es de proponer un desarrollo limitado en $\sqrt{\in}$ del precio de la opción. Recordemos antes la propiedad de retorno a la media a través del proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

1.3.1 Retorno a la media

Estudiemos más en detalle el proceso Y de dinámica de Ornstein-Uhlenbeck

$$dY_t = \alpha(m-Y_t)dt + \beta d\widehat{Z}_t, \qquad Y_0 = y$$

También tenemos una expresión explícita para Y_t:

$$Y_t = m + (y-m)e^{-\alpha t} + \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} d\widehat{Z}_s$$

que prueba que Y_t sigue la distribución gaussiana de media $m+(y-m)e^{-\alpha t}$ y de varianza $v^2\left(1-e^{-2\alpha t}\right)$, o $v^2 = \dfrac{\beta^2}{2\alpha}$, Y_t converge en la distribución cuando $t \to +\infty$ para $\pi = \mathcal{N}\left(m, v^2\right)$, la distribución gaussiana de media m y de varianza v^2.

<u>Probabilidad estacionaria</u>

Esta ley limita π y es el límite de la distribución estacionaria del proceso Y: si Y_0 sigue la distribución $\mathcal{N}\left(m, v^2\right)$, entonces a toda fecha $t \geq 0$ la variable aleatoria Y_t sigue también la distribución $\mathcal{N}\left(m, v^2\right)$. Su densidad Φ está dada por:

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}v}\exp\left(-\frac{(u-m)^2}{2v^2}\right)$$

Que verifica la ecuación:

$$\mathcal{L}_{OU}^{*}\Phi=0$$

donde:

$$\mathcal{L}_{OU}^{*}=-\alpha\frac{\partial}{\partial y}\left((m-y)\cdot\right)+\frac{1}{2}\beta^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

es el adjunto del operador:

$$\mathcal{L}_{OU}^{*}=\frac{1}{2}\beta^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\alpha(m-y)\frac{\partial}{\partial y}$$

que es el generador infinitesimal de la difusión Y, es decir, por definición el operador que tiene una función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase C^2 basada en la tendencia de la media de $g(Y_t)$ conociendo Y_t:

$$\left(\mathcal{L}_{OUg}\right)(y)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\mathbb{E}^y\left[g(Y_t)-g(y)\right]}{t}$$

En esta escritura $\mathbb{E}^y$ designa la esperanza bajo la probabilidad $\mathbb{P}^y$ que es la probabilidad condicional sabiendo que $Y_0=y$. Ponemos:

$$L_\pi^2=L^2\left(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\pi\right),\qquad \left(g_1|g_2\right)=\int_{\mathbb{R}}g_1g_2\,d\pi,\qquad \|g\|=\sqrt{(g|g)}.$$

Definimos la aplicación $P_t:L_\pi^2\to L_\pi^2$ por:

$$(P_tg)(y)=\mathbb{E}^y\left[g(Y_t)\right]$$

y el conjunto:

$$\mathcal{D}\left\{g\in L_\pi^2\,\middle|\,\exists\psi\in L_\pi^2,\lim_{t\to 0^+}\left\|\frac{P_t-g}{t}-\psi\right\|=0\right\}.$$

El generador infinitesimal $\mathcal{L}_{OU}$ está definido sobre $\mathcal{D}\subset\mathcal{L}_\pi^2$ con valores dentro de L_π^2. Daremos un sentido a la expresión $\mathcal{L}_{OUg}$ si y solo sí $g\in\mathcal{D}$.

<u>Propiedad de descorrelación, Teorema ergódico</u>

El universo $\in$ de intensidad α de la fuerza de retorno se interpreta también como el tiempo característico de descorrelación del proceso de Ornstein-Uhlenbeck, porque, si $s\le t$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(Y_s, Y_t) &= \operatorname{cov}\left(\beta\int_0^s e^{-\alpha(s-u)}d\widehat{Z}_u, \beta\int_0^t e^{-\alpha(t-v)}d\widehat{Z}_v\right) \\
&= \beta^2 e^{-\alpha(t+s)}\mathbb{E}\left[\int_0^s e^{\alpha u}d\widehat{Z}_u \int_0^t e^{\alpha v}d\widehat{Z}_v\right] \\
&= \beta^2 e^{-\alpha(t+s)}\mathbb{E}\int_0^s e^{2\alpha u}du \\
&= v^2\left(e^{-\alpha(t-s)} - e^{-\alpha(t+s)}\right).
\end{aligned}$$

Por consiguiente, si s y t tienden hacia $+\infty$ de forma que $\Delta = |t-s|$ permanezca constante, la covarianza límite de Y_s y de Y_t vale $v^2 e^{-\alpha\Delta}$. Notemos que es exactamente la covarianza de Y_s y de Y_t bajo la distribución estacionaria.

En el límite, cuando este tiempo típico de descorrelación $\in$ es infinitamente pequeño, cuando α es infinitamente grande, los valores Y_s y Y_t, igual para los campos vecinos s y t, son independientes (su covarianza es nula y el proceso Y es gaussiano). Es por esta razón que debemos usar los teoremas ergódicos.

Mas exactamente, para toda función g integrable contra la medida estacionaria $\mathcal{N}(m, v^2)$,

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{1}{T-t}\int_t^T g(Y_s)\,ds = \langle g\rangle \qquad (1.3.1)$$

donde, por definición, $\langle g\rangle$ es la esperanza de la función g contra la medida estacionaria,

$$\langle g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\Phi(u)\,du$$

en la práctica, la aproximación:

$$\frac{1}{T-t}\int_t^T g(Y_s)\,ds \approx \langle g\rangle$$

será válida si $\alpha \gg \frac{1}{T-t}$, En este contexto de mercados financieros, esto significa que solo se podrá hacer esta aproximación si estamos suficientemente lejos del vencimiento T de la opción tratada.

Ecuación homogénea

Consideremos el conjunto $\mathcal{H}$ de las funciones $\varphi \in \mathcal{D}$ (entonces $\varphi \in L^2_\pi$) y las soluciones de la ecuación homogénea $\mathcal{L}_{OU}\varphi = 0$. Esta última ecuación es en realidad la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{1}{2}\beta^2\varphi''(y) + \alpha(m-y)\varphi'(y) = 0$$

El conjunto de soluciones de esta ecuación es el espacio vectorial de dimensión 2 generado por las constantes y por la función $\psi \to \exp\left(\frac{(m-z)^2}{2v^2}\right)dz$. Esta última función no siendo de cuadrados integrables contra la medida estacionaria $\pi = \mathcal{N}\left(m, v^2\right)$, $\mathcal{H}$ es el conjunto de funciones constantes. (ψ no es integrable contra π, por ese hecho, no podemos dar sentido a $\mathbb{E}^y\left[\psi\left(Y_t\right)\right]$ ni con mayor razón a $\left(\mathcal{L}_{OU}\psi\right)(y) = \lim_{t\to 0^+}\frac{\mathbb{E}^y\left[\psi\left(Y_t\right)\right]-\psi(y)}{t}$).

1.3.2 El precio corregido de Black & Scholes

Notación

Nos colocamos bajo la hipótesis $\in \ll T-t$. Bajo esta hipótesis, Y_t llega a su ley límite $\mathcal{N}\left(m, v^2\right)$ en tiempo finito. Nos colocaremos entonces en la asíntota

$$\in \to 0, \qquad v^2 = \text{constante}$$

Como $v^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha}$, esto significa que $\beta = v\sqrt{2\alpha} = \frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{\in}}$ tiende hacia $+\infty$. Podemos reescribir la dinámica 1.1.1 haciendo aparecer el parámetro infinitamente pequeño ε:

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = rX_t^\varepsilon dt + \sigma X_t^\varepsilon dW_t^* \\ \sigma_t = f\left(Y_t^\varepsilon\right) \\ dY_t^\varepsilon = \left\{\frac{1}{\varepsilon}\left(m - Y_t^\varepsilon\right) - \frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \wedge\left(t, X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon\right)\right\}dt + \frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}d\widehat{Z}_t^* \end{cases}$$

El precio P^ε de la opción europea de madurez T y de pay off $H = h\left(X_t^\varepsilon\right) \in L^2\left(\mathbb{P}^*, \mathcal{F}_T\right)$ verifica:

$$\frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t}\frac{1}{2}\left(X_t^\varepsilon\right)^2 f\left(Y_t^\varepsilon\right)^2\frac{\partial^2 P^\varepsilon}{\partial x^2} + \rho\frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}X_t^\varepsilon f\left(Y_t^\varepsilon\right)\frac{\partial^2 P^\varepsilon}{\partial x\partial y} + \frac{v^2}{\varepsilon}\frac{\partial^2 P^\varepsilon}{\partial y^2}$$
$$+r\left(X_t^\varepsilon\frac{\partial P^\varepsilon}{\partial x} - P^\varepsilon\right) + \frac{1}{\varepsilon}\left(m - Y_t^\varepsilon\right)\frac{\partial P^\varepsilon}{\partial y} - \frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}\wedge\frac{\partial P^\varepsilon}{\partial y} = 0$$

Y por lo tanto es solución de la EDP:

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2\right)P^\varepsilon(t,x,y) = 0 \qquad (1.3.2)$$

Con la condición terminal:

$$P^{\varepsilon}(T,x,y)=h(x)$$

donde:

$$\mathcal{L}_2=\mathcal{L}_{BS}\left(f(y)\right)=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}x^2 f(y)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+r\left(x\frac{\partial}{\partial x}-\cdot\right)$$

es el operador Black & Scholes del parámetro de volatilidad $f(y)$,

$$\mathcal{L}_0=\varepsilon\mathcal{L}_{OU}=v^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+(m-y)\frac{\partial}{\partial y}$$

es el generador infinitesimal de Ornstein-Uhlenbeck multiplicado por ε, y

$$\mathcal{L}_1=\rho v\sqrt{2x}f(y)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-v\sqrt{2}\wedge\frac{\partial}{\partial y}$$

En todo lo que sigue asumiremos el hecho de la hipótesis que la prima de riesgo $\wedge$ es una función continua limitada solo dependiente de y.

El problema a resolver

Nos ponemos en las condiciones en que, para todo $\varepsilon>0$, la EDP 1.3.2 tiene una sola solución. Vamos a ver que esta solución P^{ε} tiene un límite cuando ε tiende a 0 y vamos a interesarnos en la corrección de orden 1.

Para hacer esto asumimos la existencia de un desarrollo en serie de la forma:

$$P^{\varepsilon}=P_0+\sqrt{\varepsilon}P_1+\varepsilon P_2+\varepsilon\sqrt{\varepsilon}P_3+\varepsilon^2P_4+\cdots$$

La ecuación 1.3.2 se reescribe formalmente:

$$\begin{aligned}0=&\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}_0P_0\\&+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\mathcal{L}_0P_1+\mathcal{L}_1P_0\right)\\&+\left(\mathcal{L}_0P_2+\mathcal{L}_1P_1+\mathcal{L}_2P_0\right)\\&+\sqrt{\varepsilon}\left(\mathcal{L}_0P_3+\mathcal{L}_1P_2+\mathcal{L}_2P_1\right)\\&+\cdots\end{aligned}$$

Buscamos las funciones $P_1:\mathbb{R}_+\mathrm{x}\mathbb{R}_+^*\mathrm{x}\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ suficientemente regulares que verifiquen:

$$\begin{cases}\mathcal{L}_0P_0=0, & P_0(T,x,y)=h(x),\\ \mathcal{L}_1P_1+\mathcal{L}_1P_0=0, & P_1(T,x,y)=0,\\ \mathcal{L}_0P_n+\mathcal{L}_1P_{n-1}+\mathcal{L}_2P_{n-2}=0, & P_n(T,x,y)=0, \qquad \forall_n\geq 2.\end{cases}$$

El operador $\mathcal{L}_0$ actúa solo sobre la variable y. Mas exactamente observemos que $Q_i^{t,x} = P_i(t,x,\cdot)$ es únicamente una función de y. Tenemos:

$$(\mathcal{L}_0 P_1)(t,x,y) = (\mathcal{L}_0 Q_i^{t,x})(y)$$

(Esta condición no es verdadera para el operador $\mathcal{L}_1$). Con el fin de dar un sentido a la expresión $\mathcal{L}_0 P_n$ es suficiente con dar un sentido a todos los t y x, en $\mathcal{L}_0 Q_n^{t,x}$

Uno busca las funciones de P_i tales que $P_i(t,x,\cdot) \in \mathcal{D}$, en particular $P_i(t,x,\cdot) \in L_\pi^2$

En fin, los operadores $\mathcal{L}_1$ hacen intervenir las primeras derivadas en tiempo y las segundas en x y, en y. Buscamos entonces las funciones P_1 de clase $C^{1,2,2}\cdot$.

Nos hemos propuesto entonces resolver el siguiente problema: encontrar las funciones $P_1 : \mathbb{R}_+ \text{x} \mathbb{R}_+^* \text{x} \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $C^{1,2,2}\cdot$ que verifiquen:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_o P_0 = 0, & P_0(T,x,y) = h(x), \\ \mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0 = 0, & P_1(T,x,y) = 0 \\ \mathcal{L}_0 P_n + \mathcal{L}_i P_{n-1} + \mathcal{L}_2 P_{n-2} = 0, & P_n(T,x,y) = 0, \qquad \forall \geq 2. \end{cases}$$

y tal que $P_1(t,x,\cdot) \in \mathcal{D}$ para todos t,x.

Observemos, además, que por la probabilidad $\mathbb{P}^*$ seleccionada por el mercado, tenemos:

$$\mathbb{P}^*(t,X_t,Y_t) = \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}h(X_T)\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

Donde $\mathcal{F}_t$ es la información contenida en los dos brownianos W^* y $\widehat{Z}^*$ hasta la fecha t. El pay off, supuestamente de cuadrado integrable[1] bajo $\mathbb{P}^*, P^\varepsilon(t,X_t,Y_t)$ está también en el espacio $L^2(\mathbb{P}^*)$.

De hecho, nos limitaremos a la búsqueda de las funciones P_0 y P_1. Estas nos permitirán obtener el precio corregido en el orden $1: P_0 + \sqrt{\varepsilon} P_1$. Vamos a proceder en cinco etapas. Antes de esto, tres observaciones sobre los operadores $\mathcal{L}_1$:

1. $\mathcal{L}_0$ solo hace intervenir la variable y; para una función $\psi(t,x), \mathcal{L}_0 \psi = 0$.
2. $\mathcal{L}_1$ es una combinación de las derivadas $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial}{\partial y}$; para una función $\psi(t,x), \mathcal{L}_1 \psi = 0$

[1] Los conjuntos de todas las funciones medibles de cuadrado integrable sobre un dominio dado forman un espacio de Hilbert sumable, también llamado espacio L².

3. $\mathcal{L}_2$ no hace intervenir derivadas con respecto a y; sin embargo, la variable y está presente a través de $f(y)$ un factor de $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$; para una función $\psi(t,x)$,

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathcal{L}_2\psi\right)(t,x)\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathcal{L}_2\psi\right)(t,x,u)\Phi(u)du\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x)+\frac{1}{2}x^2 f(u)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(t,x)+r\left(x\frac{\partial\psi}{\partial x}(t,x)-\psi(t,x)\right)\right)\Phi(u)du\\
&=\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x)+\frac{1}{2}x^2\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(u)\Phi(u)du\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(t,x)+r\left(x\frac{\partial\psi}{\partial x}(t,x)-\psi(t,x)\right)\\
&=\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x)+\frac{1}{2}\overline{\sigma}^2x^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(t,x)+r\left(x\frac{\partial\psi}{\partial x}(t,x)-\psi(t,x)\right)\\
&\left\langle\mathcal{L}_2\right\rangle\psi(t,x)
\end{aligned}
$$

Hemos definido:

$$\overline{\sigma}^2=\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(u)\Phi(u)du=\left\langle f^2\right\rangle$$

Para todo lo que sigue asumiremos que $f\in L_\pi^2$ y $\left\langle\mathcal{L}_2\right\rangle=\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right)$

Suponemos que las funciones $P_0,P_1,P_2,\ldots$ responden al problema de arriba, y buscamos que calcular P_0 y P_1.

- Primera etapa: $\mathcal{L}_0P_0=0$

  Como $\mathcal{L}_0P_0=0,\mathcal{L}_0Q_0^{t,x}=0:P_0(t,x,\cdot)$ pertenece al conjunto $\mathcal{H}$ de soluciones de la ecuación homogénea de la difusión Y. Ya hemos demostrado que este conjunto se reduce a las funciones constantes. Esto demuestra que la función P_0 no depende de y. Por exceso, veremos $P_0(t,x)$.
- Segunda etapa: $\mathcal{L}_0P_1+\mathcal{L}_1P_0=0$

  Como P_0 no depende de y, $\mathcal{L}_1P_0=0$; la ecuación $\mathcal{L}_0P_1+\mathcal{L}_1P_0=0$ se reduce entonces a $\mathcal{L}_0P_1=0$. Como en la etapa 1, mostramos que la función P_1 no depende de y. Por exceso veremos $P_1(t,x)$.

  Sobre esta, sabemos que el precio corregido al orden 1, $P_0+\sqrt{\varepsilon}P_1$ no depende de y. Esta es una propiedad que debemos hacer notar: al orden 1, no hay necesidad de conocer el nivel actual de la volatilidad para determinar el precio de la opción; la fecha t de la transacción y el nivel actual de precios x de las cotizaciones del subyacente son suficientes. Esto cae bien porque la volatilidad no se puede observar directamente.

- Tercera etapa: $\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_1 P_1 + \mathcal{L}_2 P_0 = 0$
  Como P_1 no depende de y, $\mathcal{L}_1 P_1 = 0$; la ecuación $\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_1 P_1 + \mathcal{L}_2 P_0 = 0$ se reduce a $\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_2 P_0 = 0; \mathcal{L}_0 P_2 \in L^2_\pi$ (donde $\mathcal{L}_2 P_0 \in L^2_\pi$) y por definición de la probabilidad invariante $\pi = \mathcal{N}\left(m, v^2\right) = \Phi(u)\,du$,

  $$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{L}_0 P_2 \right\rangle(t,x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathcal{L}_0 P_2\right)(t,x,u)\,\Phi(u)\,du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P_2(t,x,u)\left(\mathcal{L}_0^{*}\Phi(u)\right)du \\ &= 0\end{aligned}$$

  Por consiguiente $\left\langle \mathcal{L}_0 P_2 \right\rangle = 0$, $\left\langle \mathcal{L}_2 \right\rangle P_0 = 0$, lo que también se escribe $\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right) P_0 = 0$. En el orden 0, el precio de la opción está dado por el modelo de Black & Scholes, usado con el parámetro de volatilidad constante $\overline{\sigma}$, media ergódica de la volatilidad estocástica. Falta determinar P_1.
- Cuarta etapa: La ecuación de Poisson
  Ahora conocemos P_0, por lo que también $\mathcal{L}_2 P_0$ es una función de (t,x,y)
  Ciertamente P_0 no depende de y, pero el coeficiente $f(y)$ en factor de $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ en la expresión de $\mathcal{L}_2$ reintroduce la dependencia en y. Sea $R^{t,x} = \left(\mathcal{L}_2 P_0\right)(t,x,\cdot)$ y $Q_2^{t,x} = P_2(t,x,\cdot)$.Como $\left(\mathcal{L}_0 P_2\right)(t,x,y)\, y Q_2^{t,x} = \left(\mathcal{L}_0 Q_2^{t,x}\right)(y)$. (recordemos que es una propiedad propia del operador $\mathcal{L}_0$), la igualdad

  $$\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_2 P_0 = 0$$

  entre funciones de tres variables (t,x,y) es equivalente a las igualdades

  $$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \mathrm{x} \mathbb{R}^*_+, \qquad \mathcal{L}_0 Q_2^{t,x} + R^{t,x} = 0$$

  entre funciones de una sola variable (la variable y). Damos una función $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\langle R \rangle = 0$ y nosotros buscamos $Q_2 \in \mathcal{D} \subset \mathcal{L}^2_\pi$ tal que

  $$\mathcal{L}_0 Q_2 + R = 0 \qquad (1.3.3)$$

  Esta ecuación lleva el nombre de “ecuación de Poisson”. En efecto, para una difusión browniana en el espacio, el generador infinitesimal vale $\frac{1}{2}\Delta$ donde Δ es el laplaciano, y permite obtener la ecuación de Poisson de la electrostática: La solución Q_2 se interpreta en las unidades correctas, como el potencial eléctrico correspondiente a la densidad de cargas de volumen R.
  La ecuación 1.3.3 se reescribe:

  $$v^2 Q_2''(y) + (m-y) Q_2'(y) = -R(y)$$

  Sea $D_2 = Q_2'$. Las soluciones adecuadas de solución de la ecuación sin segundo miembro:

$$v^2 D_2^{'}(y) + (m-y) D_2(y) = 0 \qquad (1.3.4)$$

es engendrada por $y \mapsto \exp\left(\frac{(y-m)^2}{2v^2}\right)$, o de manera equivalente por Φ^{-1}

una solución particular $y \mapsto \lambda(y)\exp\left(\frac{(y-m)^2}{2v^2}\right)$

$$v^2 D_2^{'}(y) + (m-y) D_2(y) = -R(y)$$

es obtenida por el método de variación de la constante: tenemos $\lambda'(y) = \frac{R(y)}{v^2}\exp\left(-\frac{(y-m)^2}{2v^2}\right)$. así,

$$Q_2^{'}(y) = -\frac{1}{v^2}\exp\left(\frac{(y-m)^2}{2v^2}\right)\left(\int_{-\infty}^{y} R(z)\exp\left(-\frac{(z-m)^2}{2v^2}\right)dz + cte_1\right)$$

o

$$Q_2^{'}(y) = -\frac{1}{v^2\Phi(y)}\left(\int_{-\infty}^{y} R(z)\Phi(z)\,dz + cte_2\right)$$

como $\int_{-\infty}^{y} R(z)\Phi(z)\,dz = \langle R\rangle = 0,\quad cte_2 = 0$ de donde

$$Q_2^{'}(y) = \frac{1}{v^2\Phi(y)}\left(\int_{-\infty}^{y} R(z)\Phi(z)\,dz\right)$$

que se trata de integrar para obtener Q_2.

En el caso que estudiamos, visto que $\langle \mathcal{L}_0 P_0\rangle = 0$,

$$R(y) = R^{t,x}(y)$$
$$= (\mathcal{L}_2 P_0)(t,x,y)$$
$$= (\mathcal{L}_2 P_0)(t,x,y) - \langle \mathcal{L}_2 P_0\rangle(t,x)$$
$$= \frac{1}{2}\left(f(y)^2 - \langle f^2\rangle\right)x^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x)$$

por consiguiente, si ϕ es una solución de $\mathcal{L}_0\phi = f^2 - \langle f^2\rangle$, entonces:

$$P_2^{t,x}(y) = \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x)\left(\phi(y) + cte\right).$$

a cada pareja (t,x) fija corresponde una constante, por lo tanto:

$$P_2(t,x,y) = -\frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x)\left(\phi(y) + c(t,x)\right)$$

y tenemos la expresión de ϕ:

$$\phi(y) = \frac{1}{v^2\Phi(y)}\left(\int_{-\infty}^{y}\left(f(z)^2 - \langle f^2\rangle\right)\Phi(z)\,dz\right).$$

Quinta etapa: $\mathcal{L}_0 P_3 + \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1 = 0$

Como $\langle \mathcal{L}_0 P_3 \rangle = 0$, tenemos $\langle \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1 \rangle = 0$, lo que también se puede escribir $\mathcal{L}_{BS}(\overline{\sigma}) P_1 = -\langle \mathcal{L}_1 P_2 \rangle$. Vemos entonces que P_1 es la solución de una ecuación de derivadas parciales del tipo Black & Scholes con un segundo miembro. El segundo término es el opuesto a la media ergódica de $\mathcal{L}_1 P_2$ y hace intervenir, como lo muestra la expresión de $\mathcal{L}_1$,

- La correlación entre volatilidad y subyacente
- La prima de riesgo de la volatilidad

Mas exactamente,

$$\mathcal{L}_1 P_2(t,x,y) = \left(\rho v \sqrt{2x} f(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - v\sqrt{2} \wedge (y) \right) P_2(t,x,y)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\rho v \sqrt{2x} f(y) \frac{\partial}{\partial x} - v\sqrt{2} \wedge (y) \right)\left(x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x) \phi'(y) \right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \rho v f(y) \phi'(y) \left(2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t,x) \right)$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2} v \wedge (y) \phi'(y) x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x)$$

Esta escritura hace aparecer las cantidades $L_2(t,x) = x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x)$ y $L_3(t,x) = x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t,x)$ y descompone $\mathcal{L}_1 P_2$ en:

- Una parte de correlación pura, en factor de la combinación lineal $2L_2 + L_3$
- Una parte de prima de riesgo de volatilidad pura, en factor de L_2.

Sobre una escala grande de tiempo delante de ε, la volatilidad alcanza su régimen estacionario:

$$\langle \mathcal{L}_1 P_2 \rangle (t,x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rho v \langle f \phi' \rangle \left(2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t,x) \right)$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2} v \langle \wedge \phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x)$$

Observemos que $\widetilde{P}_1 = \sqrt{\varepsilon} P_1$ es la corrección del precio de orden 1. $\widetilde{P}_1$ es la solución de la EDP:

$$\mathcal{L}_{BS}(\overline{\sigma}) \widetilde{P}_1 = \frac{\rho v}{\sqrt{2\alpha}} \langle f \phi' \rangle \left(2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t,x) \right)$$

$$-\frac{v}{\sqrt{2\alpha}} \langle \wedge \phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x)$$

que podemos escribir explícitamente como una combinación lineal de L_2 y L_3:

$$\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right)\widetilde{P}_1 = V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x) + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t,x)$$

con

$$V_2 = \frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}}\left(2\rho\left\langle f\phi^{'}\right\rangle - \left\langle \wedge\phi^{'}\right\rangle\right).$$

$$V_3 = \frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}}\left\langle f\phi^{'}\right\rangle$$

Ponemos $H(t,x) = V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x) + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t,x)$ .Como $\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right) = \left(x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n}\right) = x^n \frac{\partial^n P_0}{\partial x^n}\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right)P_0 = 0$ y tendremos:

$$\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right)H = \mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right)\left(V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x) + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t,x)\right) = 0$$

luego:

$$\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right)\left(-(T-t)H\right) = H - (T-t)\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right)H = H$$

lo que prueba que:

$$\widetilde{P}_1(t,x) = -(T-t)\left(V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x) + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t,x)\right) \qquad (1.3.5)$$

Uno percibe en esta fórmula que para calcular el precio corregido con orden 1, es suficiente con conocer las tres cantidades $\overline{\sigma}, V_2$ y V_3. En la práctica, será suficiente calibrar estos tres parámetros que agregan $\alpha, m, \beta, \rho, f, \gamma, \mu$. Este punto lo retomaremos cuando veamos la calibración.

1.3.3 Estrategias de cobertura

Como estamos en un mercado incompleto, no es posible eliminar el riesgo generando un portafolio que contenga solo líquido y subyacente. Acá se trata de transitar entre pérdidas eventuales debidas a una mala cobertura y al costo de la cobertura. Midamos bajo la probabilidad subjetiva $\mathbb{P}$ los rendimientos estadísticos de una estrategia.

Las estrategias de cobertura en el modelo de Black & Scholes

En el modelo de Black & Scholes, para la dinámica siguiente del subyacente:

$$dX_t = \mu X_t dt + \overline{\sigma} X_t dW_t$$

una opción europea que paga $h(X_T) \in L^2\mathbb{P}^*$ vale $P_0(t, X_t)$ a la fecha t está perfectamente cubierta por el portafolio autofinanciado que contiene

$a_t = \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t)$ unidades de subyacente y

$b_t = e^{-rt}\left(P_0(t, X_t) - X_t \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t) \right)$ unidades monetarias. En efecto:

Este portafolio replica la opción: a toda fecha t, el valor de este portafolio es $P_0(t, X_t)$, en particular, a la madurez, su valor es $P_0(T, X_t) = h(X_t)$.

Este portafolio es autofinanciado: la fórmula de Ito da:

$$dP_0(t, X_t) = \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t)\, dX_t + \left(\frac{\partial P_0}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 X_t^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt.$$

Como P_0 es la solución de la EDP de Black & Scholes

$$\frac{\partial P_0}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + r\left(x \frac{\partial P_0}{\partial x} - P_0 \right) = 0 \qquad (1.3.6)$$

tenemos

$$dP_0(t, X_t) = \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t)\, dX_t + r\left(P_0(t, X_t) - X_t \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t) \right) dt$$

i.e.

$$dP_0(t, X_t) = a_t dX_t + b_t d\left(e^{rt}\right).$$

Dicho de otra forma, la variación infinitesimal $dP_0(t, X_t)$ del valor de este portafolio es exactamente la variación debida al mercado.

A continuación, nos ponemos en el caso de un modelo de volatilidad estocástica 1.1.1.

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + f(Y_t) X_t dW_t, \\ dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \beta d\widehat{Z}_t, \end{cases}$$

proponemos calcular el costo de tres estrategias de cobertura

Primera estrategia: El delta de Black & Scholes

Costo exacto, decidimos seguir la misma estrategia de gestión de portafolio que en el caso de Black & Scholes con volatilidad $\bar{\sigma} = \sqrt{\langle f^2 \rangle}$ es decir que hemos escogido: (El índice $^{(1),(2),..}$ se refiere a la estrategia escogida.)

$$t\begin{cases} a_t^{(1)} = \dfrac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t) \\ b_t^{(1)} = e^{-rt}\left(P_o(t, X_t) - X_t \dfrac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t) \right) \end{cases}$$

En todo instante el valor de este portafolio es $a_t^{(1)} X_t + b_t^{(1)} e^{rt} = P_0(t, X_t)$. Como $P_0(t, X_t) = h(x)$, el valor final es $h(X_T)$, entonces este portafolio replica la opción. El problema es que no está autofinanciado. En efecto,

$$dP_0(t, X_t) = a_t^{(1)} dX_t + \left(\frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t) + \frac{1}{2} f(y)^2 X_t^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt$$

mientras que la variación debida al mercado vale:

$$a_t^{(1)} dX_t + b_t^{(1)} d\left(e^{rt}\right) = a_t^{(1)} dX_t + r\left(P_0(t, X_t) - X_t \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t) \right) dt$$

de modo que la diferencia, que interpretamos como el costo infinitesimal de la cobertura, no es nulo y es exactamente, usando 1.3.6:

$$dC_t^{(1)} \tag{1.3.7}$$

$$= dP_0(t, X_t) - \left(a_t^{(1)} dX_t + b_t^{(1)} d\left(e^{rt}\right) \right) \tag{1.3.8}$$

$$= \left(\frac{\partial P_0}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} f(y)^2 X_t^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, X_t) \right) - r\left(P_0(t, X_t) - X_t \frac{\partial P_0}{\partial x}(t, X_t) \right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(y)^2 - \overline{\sigma}^2 \right) X_t^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t, X_t) dt$$

Si $dC_t^{(1)} > 0$, deberemos poner más dinero en el portafolio; si $dC_t^{(1)} < 0$ debemos retirar dinero. La fórmula 1.3.7 es importante porque esta es válida trayectoria por trayectoria; es decir es una fórmula exacta, en el sentido en que no hace intervenir las expectativas; especialmente, ella no supone ninguna probabilidad del subyacente.

Recordemos que el costo de gestión del portafolio es

- Un proceso estocástico a variación finita
- De lejos más pequeño que
  - o La volatilidad media $\overline{\sigma}$ es cercana a la verdadera volatilidad $f(Y_t)$
  - o La convexidad de P_0 es pequeña, $x \mapsto P_0(t, x)$ por lo tanto tiene un perfil plano.

El vendedor de la opción afectado $P_0(0, X_0) + \widetilde{P}_1(0, X_0)$ a la fecha $t = 0; \widetilde{P}_1(0, X_0)$ es de cualquier signo como lo muestra 1.3.5. El vendedor invirtió $P_0(0, X_0)$ en el portafolio, repartido en a_0 unidades de activo de riesgo y b_0 unidades monetarias;

luego de esta inversión inicial, la gestión dinámica del portafolio de réplica $\left(a_t^{(1)}, b_t^{(1)}\right)$ tiene un costo aleatorio:

$$C_t^{(1)} = \int_0^t dC_s^{(1)} = \frac{1}{2}\int_0^t \left(f\left(Y_s\right)^2 - \overline{\sigma}^2 \right) X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}\left(s, X_s\right) ds.$$

más aun, la riqueza $\widetilde{P}_1\left(0, X_0\right)$ será positiva si es colocada, y negativa si es un préstamo del banco.

<u>Efecto de la media</u>

Heurísticamente la ergodicidad del proceso Y traduce un efecto de media y permite identificar, en el límite donde α es grande, la integral:

$$\int_0^t f\left(Y_s\right)^2 X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}\left(s, X_s\right) ds$$

por

$$\int_0^t \overline{\sigma}^2 X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}\left(s, X_s\right) ds$$

y por consecuencia el costo $C_t^{(1)}$, que es la diferencia de dos integrales, es pequeño. Observemos que no se trata de una aplicación directa del teorema ergódico 1.3.1 porque Y gobierna la dinámica de X. La herramienta técnica para demostrar la convergencia es:

$\int_0^t f\left(Y_s\right)^2 X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}\left(s, X_s\right) ds \rightarrow_{\alpha \to +\infty} \int_0^t \overline{\sigma}^2 X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}\left(s, X_s\right) ds$ es el cálculo estocástico.

Demostraremos ahora el resultado del segundo orden correspondiente a:

$$C_t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(B_t + M_t\right) + O\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

donde $\left(B_t\right)_{t \geq 0}$ es un proceso de variación finita y $\left(M_t\right)_{t \geq 0}$ una martingala de media cero de orden 1 con respecto a α.

La prueba hace intervenir la función de clase $C^2 \phi$; recordemos que ella verifica $\mathcal{L}_0 \phi = f^2 - \left\langle f^2 \right\rangle$, y $\mathcal{L}_0 \phi = f^2 - \overline{\sigma}^2$ así $\left(f\left(Y_s\right)^2 - \overline{\sigma}^2 \right) ds = \left(\mathcal{L}_0 \phi\right)\left(Y_s\right) ds$. Como, por la fórmula de Ito,

$$d\phi\left(Y_s\right) = \alpha\left(\mathcal{L}_0 \phi\right)\left(Y_s\right) ds + v\sqrt{2\alpha}\phi'\left(Y_s\right) d\widehat{Z}_s$$

tenemos:

$$\left(f\left(Y_s\right)^2 - \overline{\sigma}^2 \right) ds = \frac{1}{\alpha}\left(d\phi\left(Y_s\right) - v\sqrt{2\alpha}\phi\left(Y_s\right) d\widehat{Z}_s \right)$$

de tal forma que:

$$C_t^{(1)} = \frac{1}{2\alpha}\left\{X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) d\phi(Y_s) - v\sqrt{2\alpha}\int_0^t \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s)\phi(Y_s) d\widehat{Z}_s\right\}$$

Sea M la martingala-$\mathbb{P}$ local definida por

$$M_t = -\frac{v}{\sqrt{2}}\int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s)\phi(Y_s) d\widehat{Z}_s$$

así

$$C_t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} M_t + \frac{1}{2\alpha}\int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) d\phi(Y_s)$$

Esta escritura puede hacer creer que $C_t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} M_t + O\left(\frac{1}{\alpha}\right)$, pero esto no es nada ya que el elemento diferencial $d\phi(Y_s)$ es infinitamente grande frente a α, de orden $\sqrt{\alpha}$ contra la integración $X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s)$ que es una función solamente de X. Precisamente:

$$d\left(\phi(Y_s) X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s)\right) = X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) d\phi(Y_s)$$

$$+\phi(Y_s) d\left(X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s)\right)$$

$$d\left\langle \phi(Y_.), X_.^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(\cdot, X_.)\right\rangle_s,$$

con

$$d\left\langle \phi(Y_.), X_.^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(\cdot, X_.)\right\rangle$$

$$= \rho v\sqrt{2\alpha} f(Y_s)\phi(Y_s)\left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(s, X_s)\right) ds,$$

visto que:

$$d\phi(Y_s) = ...ds + v\sqrt{2\alpha}\phi'(Y_s) d\widehat{Z}_s$$

y:

$$d\left(X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s)\right) = ...ds +$$

$$f(Y_s)\left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(s, X_s)\right) dW_s$$

Por consecuencia:

$$C_t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} M_t \qquad (1.3.9)$$
$$-\frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}} \int_0^t f(Y_s)\phi(Y_s)\left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(s, X_s) \right) ds$$
$$+\frac{1}{2\alpha} \int_0^t d\left(\phi(Y_s) X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) \right)$$
$$-\frac{1}{2\alpha} \int_0^t \phi(Y_s) d\left(X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) \right).$$

El tercer término vale $\frac{1}{2\alpha}\left(\phi(Y_t) X_t^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_t) - \phi(Y_0) X_0^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(0, X_0) \right)$ y es de orden $\frac{1}{\alpha}$; el cuarto término también ya que el elemento diferencial $\left(X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) \right)$ es de orden con respecto a α. Ponemos:

$$B_t = -\frac{\rho\nu}{\sqrt{2}} \int_0^t f(Y_s)\phi'(Y_s)\left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(s, X_s) \right) ds \qquad (1.3.10)$$

B es un proceso a variación finita (el hace intervenir la combinación $2L_2 + L_3$, es entonces un término de correlación pura); es a priori del orden 1 con respecto de α, salvo si $\langle f\phi' \rangle = 0$ (efecto de media). Y tendremos:

$$C_t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(B_t + M_t) + O\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

Observemos que la ecuación 1.3.10 no nos permite decidir el ángulo de B. Una buena estrategia debería, en el orden 1 al menos, no costar nada en la media. Con este fin, proponemos corregir ligeramente el portafolio de Black & Scholes.

<u>Segunda estrategia:</u> estrategia autofinanciada en la media

Para que una estrategia no cueste nada en la media de primer orden, será suficiente "hacer aparecer" el término:

$$+\frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}} \langle f\phi' \rangle \int_0^t \left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(s, X_s) \right) ds \qquad (1.3.11)$$

Que se agregaría a los cuatro términos de 1.3.9 que componen $C_t^{(1)}$. En efecto, combinado al término $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} B_t$, genera un término de orden $\frac{1}{\alpha}$, a consecuencia del efecto de medias descrito más arriba. Obtendremos entonces la aproximación $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} M_t + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ para el costo de gestión. Una alternativa natural desde el punto de vista de lo anterior, sería escoger:

$$a_t = \frac{\partial\left(P_0 + \widetilde{P}_1\right)}{\partial x}\left(t, X_t\right)$$

en lugar de $\frac{\partial P_0}{\partial x}\left(t, X_t\right)$. En resumen $\widetilde{P}_1$ es la solución de la EDP.

$$\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right)\widetilde{P}_1 = \frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}}\left\langle f\phi'\right\rangle\left(2x^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}\left(t,x\right) + X_s^3\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}\left(t,x\right)\right) \qquad (1.3.12)$$

$$-\frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}}\left\langle\wedge\phi'\right\rangle x^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}\left(t,x\right)$$

El término $\frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}}\left\langle f\phi'\right\rangle\left(2x^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}\left(t,x\right) + X_s^3\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}\left(t,x\right)\right)$ se parece mucho al que nosotros desearíamos que aparezca, pero el término $-\frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}}\left\langle\wedge\phi'\right\rangle x^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}\left(t,x\right)$ esta demás: es en realidad un término de prima de riesgo de volatilidad pura, mientras que, como hemos precisado antes, el ángulo de B que buscamos que compensar es un término solo de correlación. Es así que es necesario definir la función $\widetilde{Q}_1 : \mathbb{R}_+ \mathrm{x} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ como solución de la EDP:

$$\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right)\widetilde{Q}_1 = \frac{\rho\nu}{\sqrt{2\alpha}}\left\langle f\phi'\right\rangle\left(2x^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}\left(t,x\right) + X_s^3\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}\left(t,x\right)\right) \qquad (1.3.13)$$

con la condición terminal:

$$\widetilde{Q}_1\left(T,x\right) = 0 \qquad \forall x > 0$$

y de considerar el portafolio definido por:

$$\begin{cases} a_t^{(2)} = \frac{\partial\left(P_0 + \widetilde{Q}_1\right)}{\partial x}\left(t, X_t\right) \\ b_t^{(2)} = e^{-rt}\left(\left(P_0 + \widetilde{Q}_1\right)\left(t, X_t\right) - X_t\frac{\partial\left(P_0 + \widetilde{Q}_1\right)}{\partial x}\left(t, X_t\right)\right) \end{cases}$$

Este portafolio vale $\left(P_0 + \widetilde{Q}_1\right)\left(t, X_t\right)$ a la fecha t; su variación infinitesimal es:

$$
\begin{aligned}
& d\left(P_0+\widetilde{Q}_1\right)(t,X_t) \\
& = a_t^{(2)} dX_t + \left(\frac{\partial\left(P_0+\widetilde{Q}_1\right)}{\partial t}(t,X_t) + \frac{1}{2} f\left(Y_t\right)^2 X_t^2 \frac{\partial^2\left(P_0+\widetilde{Q}_1\right)}{\partial x^2}(t,X_t) \right) dt
\end{aligned}
$$

mientras que la variación debida al mercado es:

$$
\begin{aligned}
& a_t^{(2)} dX_t + b_t^{(2)}\left(e^{rt}\right) \\
& = a_t^{(2)} dX_t + r\left(\left(P_0+\widetilde{Q}_1\right)(t,X_t) - X_t \frac{\partial\left(P_0+\widetilde{Q}_1\right)}{\partial x}(t,X_t) \right) dt
\end{aligned}
$$

si bien que el costo infinitesimal verifica:

$$
\begin{aligned}
& \frac{dC_t^{(2)}}{dt} = \frac{\partial\left(P_0+\widetilde{Q}_1\right)}{\partial t}(t,X_t) + \frac{1}{2} f\left(Y_t\right)^2 X_t^2 \frac{\partial^2\left(P_0+\widetilde{Q}_1\right)}{\partial x^2}(t,X_t) \\
& -r\left(\left(P_0+\widetilde{Q}_1\right)(t,X_t) - X_t \frac{\partial\left(P_0+\widetilde{Q}_1\right)}{\partial x}(t,X_t) \right) \\
& \mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right)\left(P_0+\widetilde{Q}_1\right)(t,X_t) \frac{1}{2}\left(f\left(Y_t\right)^2 - \overline{\sigma}^2 \right) X_t^2 \frac{\partial^2\left(P_0+\widetilde{Q}_1\right)}{\partial x^2}(t,X_t)
\end{aligned}
$$

Estando dada la ecuación 1.3.13, y visto que $\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right)P_0 = 0$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
& dC_t^{(2)} = dC_t^{(1)} \\
& + \frac{\rho \nu}{\sqrt{2\alpha}} \left\langle f\phi' \right\rangle \left(2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,X_t) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t,X_t) \right) dt \\
& + \left(\frac{1}{2} f\left(Y_t\right)^2 - \overline{\sigma}^2 \right) X_t^2 \frac{\partial^2 \widetilde{Q}_1}{\partial x^2}(t,X_t)\, dt,
\end{aligned}
$$

por consiguiente:

$$
\begin{aligned}
& C_t^{(2)} = C_t^{(1)} \\
& + \frac{\rho \nu}{\sqrt{2\alpha}} \left\langle f\phi' \right\rangle \left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(s,X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(s,X_s) \right) ds \\
& + \frac{1}{2}\int_0^t \left(f\left(Y_s\right)^2 - \overline{\sigma}^2 \right) X_s^2 \frac{\partial^2 \widetilde{Q}_1}{\partial x^2}(s,X_s)\, ds.
\end{aligned}
$$

El último término es del orden $\frac{1}{\alpha}$: acá el efecto de media juega sobre $X_s^2 \frac{\partial^2 \widetilde{Q}_1}{\partial x^2}(s,X_s)$ que es del orden $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, igual que $\widetilde{Q}_1$. El segundo término es finalmente el término buscado 1.3.11. Finalmente,

$$C_t^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} M_t + O\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Observemos que, si seguimos esta estrategia de gestión, los valores del portafolio y de la opción difieren del orden $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, ya que esta diferencia es precisamente $\widetilde{Q}_1 - \widetilde{P}_1$. Si lo que deseamos es que los valores del portafolio y de la opción no sean diferentes del orden $\frac{1}{\alpha}$, debemos adoptar la estrategia siguiente.

<u>Tercera estrategia</u>: Un portafolio que se "pega" al precio de la opción

Escogemos:

$$\begin{cases} a_t^{(3)} = \dfrac{\partial\left(P_0 + \widetilde{P}_1\right)}{\partial x}(t, X_t), \\ b_t^{(3)} = e^{-rt}\left(\left(P_0 + \widetilde{P}_1\right)(t, X_t) - X_t \dfrac{\partial\left(P_0 + \widetilde{P}_1\right)}{\partial x}(t, X_t)\right) \end{cases}$$

este portafolio vale $\left(P_0 + \widetilde{P}_1\right)(t, X_t)$ a la fecha t; su variación infinitesimal es:

$$d\left(P_0 + \widetilde{P}_1\right)(t, X_t)$$
$$= a_t^{(3)} dX_t \left(\frac{\partial\left(P_0 + \widetilde{P}_1\right)}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} f(Y_t)^2 X_t^2 \frac{\partial^2\left(P_0 + \widetilde{P}_1\right)}{\partial x^2}(t, X_t)\right) dt,$$

mientras que la variación debida al mercado es:

$$a_t^{(3)} dX_t + b_t^{(3)} d\left(e^{rt}\right)$$
$$= a_t^{(3)} dX_t + r\left(\left(P_0 + \widetilde{P}_1\right)(t, X_t) - X_t \frac{\partial\left(P_0 + \widetilde{P}_1\right)}{\partial x}(t, X_t)\right) dt,$$

si bien que el costo infinitesimal verifica:

$$\frac{dC_t^{(3)}}{dt} = \frac{\partial\left(P_0 + \widetilde{P}_1\right)}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} f(Y_t)^2 X_t^2 \frac{\partial^2\left(P_0 + \widetilde{P}_1\right)}{\partial x^2}(t, X_t)$$
$$-r\left(\left(P_0 + \widetilde{P}_1\right)(t, X_t) - X_t \frac{\partial\left(P_0 + \widetilde{P}_1\right)}{\partial x}(t, X_t)\right)\overline{\sigma}$$
$$= \mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right)\left(P_0 + \widetilde{P}_1\right)(t, X_t) + \frac{1}{2}\left(f(Y_t)^2 - \overline{\sigma}^2\right) X_t^2 \frac{\partial^2\left(P_0 + \widetilde{P}_1\right)}{\partial x^2}(t, X_t)$$

a la vista de 1.3.12, y como $\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right)P_0=0$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
dC_t^{(3)} &= dC_t^{(2)} \\
&-\frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}}\left\langle \wedge\phi' \right\rangle X_t^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}\left(t,X_t\right)dt \\
&+\frac{1}{2}\left(f\left(Y_t\right)^2-\overline{\sigma}^2\right)X_t^2\frac{\partial^2\left(P_0+\widetilde{Q}_1\right)}{\partial x^2}\left(t,X_t\right)dt
\end{aligned}
$$

por consiguiente:

$$
\begin{aligned}
C_t^{(3)} &= C_t^{(2)} \\
&-\frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}}\left\langle \wedge\phi' \right\rangle \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}\left(t,X_s\right)ds \\
&+\frac{1}{2}\int_0^t\left(f\left(Y_s\right)^2-\overline{\sigma}^2\right)X_s^2\frac{\partial^2\left(\widetilde{P}_1+\widetilde{Q}_1\right)}{\partial x^2}\left(s,X_s\right)ds
\end{aligned}
$$

El último término es del orden $\frac{1}{\alpha}$. El segundo término, del orden $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, es el precio a proporcionar para encontrar al menos, al orden $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, que es el precio de la opción a partir del costo de la estrategia autofinanciada en la media.

Es entonces el precio que el vendedor de la opción atribuye al estado incompleto del mercado. Esto es debido al carácter estocástico de la volatilidad y la cuantifica vía $-\frac{\nu}{\sqrt{2\alpha}}\left\langle \wedge\phi' \right\rangle \int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}\left(s,X_s\right)ds$ que solo es un término de riesgo de volatilidad.

1.4 El enfoque de la martingala

1.4.1 Enfoque

Ahora deseamos encontrar el precio corregido de orden 1 por un razonamiento probabilístico puro. Dicho de otra forma, vamos a ver el precio corregido, ya no como la aproximación de una solución con EDP, sino como aproximación a una martingala bajo la probabilidad de pricing (en términos cercanos al orden ε).

Nos colocamos sobre el espacio probabilístico $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ premunidos de la filtración $\mathcal{F}_t=\sigma\left(W_s,Z_s,0\le s\le t\right)$, con $\Omega=C^0\left(\left[0,T\right],\mathbb{R}^2\right)$ como conjunto de funciones continuas con valores dentro de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}$ su tribu boreliana y $\mathbb{P}$ la medida de Wiener sobre esta tribu. Suponemos la existencia de una probabilidad $\mathbb{P}^*$ equivalente a $\mathbb{P}$ tal que el precio de la opción europea de pay off $h\left(X_T\right)\in L^2\left(\mathbb{P}^*\right)$ esté dado por:

$$V_t = \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}h\left(X_T\right)\middle|\mathcal{F}_t\right] \quad (1.4.1)$$

Sea $D_t = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t}$; D es una martingala uniformemente integrable con relación a $\left(\mathcal{F}_t\right)$, estrictamente positiva. Como $\left(\mathcal{F}_t\right)$ es el aumento habitual de la filtración canónica del movimiento browniano $\left(W,Z\right)$, el teorema de representación de las martingalas nos asegura la existencia de procesos θ^W y θ^Z adaptados con relación a $\left(\mathcal{F}_t\right)$ tal que:

$$\forall t \in \left[0,T\right[, \ \int_0^t \left(\left(\theta_s^W\right)^2 + \left(\theta_s^Z\right)^2\right) \ ds < \infty$$

y tal que para todo $t \in \left[0,T\right[$

$$D_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s^W dW_s - \int_0^t \theta_s^Z dZ_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\left(\theta_s^W\right)^2 + \left(\theta_s^Z\right)^2\right) ds\right)$$

esto prueba que D es continuo. Entonces definimos

$$\begin{cases} W_t^* = W_t + \int_0^t \theta_s^W ds \\ Z_t^* = Z_t + \int_0^t \theta_s^Z ds \end{cases}$$

De acuerdo al teorema de Girsanov, W^* y Z^* son dos movimientos brownianos-$\mathbb{P}^*$ independientes. En términos de $\left(W^*, Z^*\right)$ la dinámica de X se escribe:

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + f\left(Y_t\right) X_t dW_t \\ &= \mu X_t dt + f\left(Y_t\right) X_t \left(dW_t^* - \theta_t^W dt\right) \\ &= \left(\mu - f\left(Y_t\right)\theta_t^W\right) X_t dt + f\left(Y_t\right) X_t dW_t^* \end{aligned}$$

Suponiendo que $X_T \in L^2\left(\mathbb{P}^*\right)$ y haciendo $h = id$ 1.4.1, veremos que el proceso $\left(e^{-rt}X_t\right)$ es una martingala-$\mathbb{P}^*$, lo que implica que:

$$\mu - f\left(Y_t\right)\theta_t^W = r,$$

por consiguiente:

$$\theta_t^W = \frac{\mu - r}{f\left(Y_t\right)}$$

En el universo de pricing la dinámica de Y se escribe:

$$dY_t = \alpha\left(m - Y_t\right)dt + \beta d\widehat{Z}_t$$
$$= \alpha\left(m - Y_t\right)dt + \beta\left(\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2}\,dZ_t\right)$$
$$= \alpha\left(m - Y_t\right)dt + \beta\rho\left(dW_t^* - \frac{\mu - r}{f\left(Y_t\right)}dt\right) + \beta\sqrt{1-\rho^2}\left(dZ_t^* - \theta_t^Z dt\right)$$
$$= \left(\alpha\left(m - Y_t\right) - \beta\left(\rho\frac{\mu - r}{f\left(Y_t\right)} + \sqrt{1-\rho^2}\,\theta_t^Z\right)\right)dt$$
$$+\beta\left(\rho dW_t^* + \sqrt{1-\rho^2}\,Z_t^*\right)$$

si ponemos

$$\widehat{Z}_t^* = \rho W_t^* + \sqrt{1-\rho^2}\,Z_t^*$$

Estamos definiendo un movimiento browniano-$\mathbb{P}^*$ lo que nos permite reescribir la dinámica del mercado bajo la forma

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t^* \\ \sigma_t = f\left(Y_t\right)(13.4.2) \\ dY_t = \left\{\sigma\left(m - Y_t\right) - \beta \wedge_t\right\}dt + \beta d\widehat{Z}_t^* \end{cases}$$

con:

$$\wedge_t = \rho\frac{\mu - r}{f\left(Y_t\right)} + \sqrt{1-\rho^2}\,\theta_t^Z$$

En lo que sigue vamos a suponer que el proceso $\left(\wedge_t\right)$ puede usarse bajo la forma $\wedge_t = \wedge\left(Y_t\right)$ donde $\wedge : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua delimitada, y con esto nos colocamos en el universo del pricing.

1.4.2 Observaciones

Sea $\mathcal{L}_{OU*}$ el generador infinitesimal del proceso Y en el universo del pricing, es decir, el operador para toda función g adecuada asociada a la función $\mathcal{L}_{OU*g}$ definida por

$$\left(\mathcal{L}_{OU*g}\right)(y) = \lim_{t\to 0^+}\frac{\mathbb{E}^*\left[g\left(Y_t\right)\middle|Y_0 = y\right] - g\left(y\right)}{t}$$

Donde de acuerdo a la ecuación 1.4.2

$$\mathcal{L}_{OU*} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{0*}$$

donde:

$$\mathcal{L}_{0_*} = v^2 \frac{d^2}{dy^2} + \left(m - y - v\sqrt{2\in} \wedge (y)\right) \frac{d}{dy}$$

Si ponemos $s(y) = m - y - v\sqrt{2\varepsilon} \wedge (y)$ tendremos:

$$\mathcal{L}_{0_*} = v^2 \frac{d^2}{dy^2} + s(y) \frac{d}{dy}$$

La hipótesis de delimitación de la función $\wedge$ asegura la existencia de una probabilidad estacionaria $\Phi_*(y)dy$ para Y bajo $\mathbb{P}^*$ que es la única densidad de solución probabilística de la ecuación $\mathcal{L}^*_{0_*}\Phi_* = 0$ donde $\mathcal{L}^*_{0_*}$ designa el adjunto de $\mathcal{L}_{0_*}$, en efecto, introducimos una función $\xi : \mathbb{R} \to R$ tal que $v^2 \frac{d\xi}{dy} - s(y)\xi = 0$, por ejemplo

$$\xi(y) = \exp\left(-\frac{(m-y)^2}{2v^2} - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{v} \tilde{\wedge}(y) \right)$$

donde $\tilde{\wedge}$ es una primitiva cualquiera de $\wedge$. Ahora es fácil verificar que:

$$\mathcal{L}_{0_*} = \frac{v^2}{\xi} \frac{d}{dy}\left(\xi \frac{d}{dy} \right)$$

de donde deducimos:

$$\mathcal{L}^*_{0*} = v^2 \frac{d}{dy}\left(\xi \frac{d}{dy}\left(\frac{\bullet}{\xi} \right) \right)$$

Está claro que ξ es una solución de $\mathcal{L}^*_{0*}\xi = 0$, integrable puesto que $\wedge$ es delimitada, y las únicas soluciones con posibilidad de integración de esta ecuación son los múltiplos de ξ, si bien que:

$$\Phi_*(y) = J_* \exp\left(-\frac{(m-y)^2}{2v^2} - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{v} \tilde{\wedge}(y) \right)$$

donde

$$J_* = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(m-y)^2}{2v^2} - \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{v} \tilde{\wedge}(y) \right) dy \right)^{-1}$$

Vemos que Φ_* es una corrección de orden $\sqrt{\varepsilon}$ con relación a Φ. Definimos entonces:

1) La media de una función contra esta probabilidad estacionaria:
   $\langle g \rangle_* = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\Phi_*(y)dy$

2) La volatilidad de pricing medio $\overline{\sigma_*}$:

$$\overline{\sigma_*}^2 = \langle f^2 \rangle_*$$

3) La solución $P_0^* : [0,T] \mathrm{x} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de la EDP:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma_*}\right) P_0^* = 0, \\ \forall x > 0, P_o^*\left(T - x\right) = h\left(x\right) \end{cases} \tag{1.4.3}$$

4) La función ϕ_* solución de $\mathcal{L}_{0_*}\phi_* = f^2 - \langle f^2 \rangle_*$.

5) El término de correlación:

$$V_3^* \frac{\rho\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \langle f \phi_*^{'} \rangle_*$$

6) El término fuente:

$$H^*\left(t,x\right) = V_3^*\left(2x^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}\left(t,x\right) + x^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}\left(t,x\right)\right)$$

7) La solución $Q_1^* : [0,T] x\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de la EDP:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma_*}\right) Q_1^* = H^*, \\ \forall x > 0, Q_1^*\left(T, x\right) = 0 \end{cases} \tag{1.4.4}$$

8) La función $Q^*\left(t,x\right) = P_0^*\left(t,x\right) + Q_1^*\left(t,x\right)$

9) El proceso estocástico $N_t = e^{-rt} Q^*\left(t, X_t\right)$

1.4.3 El precio corregido como aproximación martingala

Vamos a demostrar que para los términos de orden ε cercanos, N es una martingala $\mathbb{P}^*$ de valor terminal $e^{-rT} h\left(X_T\right)$. Recordemos que el valor de la opción V_t de la opción, definida por 1.4.1, es caracterizado por el hecho de que $\left(e^{-rt} V_t\right)$ es una martingala $\mathbb{P}^*$ de valor terminal $e^{-rT} h\left(X_T\right)$. De esta forma habremos mostrado que:

$$V_t = Q^*\left(t, X_t\right) + O\left(\varepsilon\right)$$

lo que permitirá de interpretar $Q^*\left(t, X_t\right)$ como el precio de la opción con primer orden.

Es fácil ver que $N_T = e^{-rT} h\left(X_T\right)$. Sin embargo, es menos fácil mostrar que N es una martingala $\mathbb{P}^*$, con $O\left(\varepsilon\right)$ cerca. Para eso usaremos la fórmula de Ito, asumiendo a Q como suficientemente regular, y las definiciones de la sección anterior:

$$
\begin{aligned}
&e^{rt}dN_t\\
&= dQ^*(t,X_t) - rQ^*(t,X_t)\,dt\\
&=\left(\frac{\partial Q^*}{\partial t}(t,X_t)+\frac{1}{2}f(Y_t)^2X_t^2\frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(t,X_t)-r\left(Q^*(t,X_t)-X_t\frac{\partial Q^*}{\partial x}(t,X_t)\right)\right)dt\\
&+f(Y_t)X_t\frac{\partial Q^*}{\partial x}(t,X_t)\,dW_t^*\\
&=\left(\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma_*}\right)Q^*(t,X_t)+\frac{1}{2}\left(f(Y_t)^2-\overline{\sigma_*}^2\right)X_t^2\frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(t,X_t)\right)dt\\
&+f(Y_t)X_t\frac{\partial Q^*}{\partial x}(t,X_t)\,dW_t^*\\
&=\left(H^*(t,X_t)+\frac{1}{2}\left(f(Y_t)^2-\overline{\sigma_*}^2\right)X_t^2\frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(t,X_t)\right)dt+f(Y_t)X_t\frac{\partial Q^*}{\partial x}(t,X_t)\,dW_t^*
\end{aligned}
$$

es suficiente ver que:

$$
\int_0^t\left(H^*(s,X_s)+\frac{1}{2}\left(f(Y_s)^2-\overline{\sigma_*}^2\right)X_s^2\frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s,X_s)\right)ds=\text{martingala-}\mathbb{P}^*+O(\varepsilon)
$$

como:

$$
d\phi_*(Y_s)=\frac{1}{\varepsilon}(\mathcal{L}_{0*}\phi_*)(Y_s)\,ds+\frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}\phi_*'(Y_s)\,d\widehat{Z}_s^*
$$

tenemos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^t\left(f(Y_s)^2-\overline{\sigma_*}^2\right)X_s^2\frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s,X_s)\,ds\\
&=\frac{1}{2}\int_0^r(\mathcal{L}_{0*}\phi_*)(Y_s)X_s^2\frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s,X_s)\,ds\\
&=\frac{1}{2}\int_0^t X_s^2\frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s,X_s)\left(\varepsilon d\phi(Y_s)-\nu\sqrt{2\varepsilon}\phi_*'(Y_s)\,d\widehat{Z}_s^*\right)\\
&=\text{martingala-}\mathbb{P}^*+\frac{\varepsilon}{2}\int_0^t X_s^2\frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s,X_s)\,d\phi_*(Y_s)
\end{aligned}
$$

(suponiendo que la martingala-$\mathbb{P}^*$ local $-\frac{\nu\sqrt{2\varepsilon}}{2}\int_0^t X_s^2\frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s,X_s)\phi_*'(Y_s)\,d\widehat{Z}_s^*$ sea una verdadera martingala-$\mathbb{P}^*$). La trampa en la que no debemos caer sería de creer que $\frac{\varepsilon}{2}\int_0^t X_s^2\frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s,X_s)\,d\phi_*(Y_s)=O(\varepsilon)$. Ciertamente $\phi_*(Y_s)=O(1)$, conocido como $X_s^2\frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s,X_s)$. Pero las variaciones infinitesimales de Y_s, y por consecuencia aquellas de $\phi_*(Y_s)$, son infinitamente grandes cuando ε se vuelve infinitamente pequeño, de orden $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. A menos que los dos brownianos W^* y $\widehat{Z}^*$ que gobiernan respectivamente X e Y sean independientes, esto genera un tejido infinitamente grande entre el integrante y el proceso contra el cual se ha integrado:

$$d\left\langle \phi_*(Y.), X_{\bullet}^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(\bullet, X.) \right\rangle_s$$
$$= \frac{\rho\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} f(Y_s)\phi_*'(Y_s)\left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(s, X_s)\right)ds$$

en efecto:

$$d\phi_*(Y_s) = ...ds + \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}\phi_*'(Y_s)\,d\widehat{Z}_s^*$$

y:

$$d\left(X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s, X_s)\right) = ...ds$$
$$+f(Y_s)\left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(s, X_s)\right)dW_s^*.)$$

por lo tanto, integrando por partes:

$$\int_0^t X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s) d\phi_*(Y_s)$$
$$= \int_0^t d\left(X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s)\, d\phi_*(Y_s)\right)$$
$$-\int_0^t \phi_*(Y_s)\, d\left(X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s, X_s)\right)$$
$$-\frac{\rho\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} f(Y_s)\phi_*'(Y_s)\left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(s, X_s)\right)ds$$
$$= O(1) - \frac{\rho\nu\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t f(Y_s)\phi_*'(Y_s)\left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s, X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(s, X_s)\right)ds$$

Para ver que la primera integral es un $O(1)$, podemos ya sea escribir $X_t^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(t, X_t)\phi_*(Y_t) - X_0^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(0, X_0)\phi_*(Y_0)$, o ya sea recordar que la presencia de Y en el elemento diferencial no trae consecuencias ya que el integrado (el proceso idénticamente igual a 1) tiene variación finita y genera un tejido nulo con el elemento diferencial. Para la segunda integral, es suficiente recordar que Y está ausente del elemento diferencial y que el integrado $\phi_*(Y_s)$ es un $O(1)$.

Por consiguiente:

$$\int_0^t \left(H^*(s,X_s) + \frac{1}{2}\left(f(Y_s)^2 - \overline{\sigma}_*^2 \right) X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s,X_s) \right) ds$$

$$-\frac{\rho\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} f(Y_s)\phi_*'(Y_s)\left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s,X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(s,X_s) \right) ds$$

$$+\int_0^t H^*(s,X_s)\,ds$$

o:

$$\int_0^t H^*(s,X_s)\,ds - \rho\nu\sqrt{2\varepsilon}\int_0^t f(Y_s)\phi_*'(Y_s)\left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s,X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(s,X_s) \right) ds$$

$$= \frac{\rho\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\int_0^t \left(f(Y_s)\phi_*'(Y_s) - \left\langle f\phi_*' \right\rangle_* \right)\left(2X_s^2 \frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s,X_s) + X_s^3 \frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}(s,X_s) \right) ds$$

$$= \frac{\rho\nu\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\left\{ O\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \right\} \qquad \text{(Efecto de media o teorema ergódico)}$$

$$= \mathrm{O}(\varepsilon)$$

finalmente:

$$\int_0^t \left(H^*(s,X_s) + \frac{1}{2}\left(f(Y_s)^2 - \overline{\sigma}_*^2 \right) X_s^2 \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^2}(s,X_s) \right) ds = \text{martingala-}\mathbb{P}^* + O(\varepsilon)$$

Que es lo que se buscaba demostrar.

1.4.4 Encontrando el precio $P_0 + \widetilde{P}_1$

El precio $P_0 + \widetilde{P}_1$ obtenido por el método de la EDP es la solución de la EDP:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right)\left(P_0 + \widetilde{P}_1\right) = H(t,x) \\ \forall x > 0, \left(P_0 + \widetilde{P}_1\right)(T,x) = h(x) \end{cases} \qquad (1.4.5)$$

El precio $P_0^* + Q_1^*$ obtenido por el método de la martingala, es el mismo, la solución de la EDP:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}_*\right)\left(P_0^* + Q_1^*\right) = H^*(t,x) \\ \forall x > 0, \left(P_0^* + Q_1^*\right)(T,x) = h(x) \end{cases} \qquad (1.4.6)$$

Los términos de las fuentes tienen las expresiones:

$$H(t,x) = V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x) + V_3 x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t,x)$$

donde:

$\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right)P_0=0$ y $P_0\left(T,x\right)=h\left(x\right)$, y

$$\mathrm{H}^*(t,x)=V_3^*\left(2x^2\frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2}(s,X_s)+x^3\frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}\right)(t,x)$$

donde:

$\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma_*}\right)P_0^*=0$ y $P_0^*\left(T,x\right)=h\left(x\right)$. Vamos a mostrar que, al primer orden, los dos precios son coincidentes:

$$P_0^*+Q_1^*=P_0+\widetilde{P}_1+O\left(\varepsilon\right)$$

Para esto, es suficiente demostrar que, en $O\left(\varepsilon\right)$ cerca, $P_0^*+Q_1^*$ es la solución de la ecuación 1.4.5. Las condiciones terminales de las ecuaciones 1.4.5 y 1.4.6 siendo idénticas, es suficiente con probar que:

$$\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right)\left(P_0^*+Q_1^*\right)=H\left(t,x\right)+O\left(\varepsilon\right)$$

Para esto, damos los desarrollos limitados en $\sqrt{\varepsilon}$ dé $\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma_*}\right)$ y $H^*\left(t,x\right)$.

<u>Desarrollo limitado de</u> $\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma_*}\right)$

Como:

$$J_*^{-1}=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(m-y)^2}{2v^2}-\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{v}\tilde{\wedge}(y)\right)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(m-y)^2}{2v^2}\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{v}\tilde{\wedge}(y)\right)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(m-y)^2}{2v^2}\right)\left(1-\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{v}\tilde{\wedge}(y)+O(\varepsilon)\right)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(m-y)^2}{2v^2}\right)dy-\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{v}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\wedge}(y)\exp\left(-\frac{(m-y)^2}{2v^2}\right)dy+O(\varepsilon)$$

$$=\sqrt{2\pi v}\left(1-\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{v}\tilde{\wedge}+O(\varepsilon)\right).$$

tenemos:

$$J_*=\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\left(1-\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{v}\tilde{\wedge}+O(\varepsilon)\right)$$

luego:

$$\frac{\Phi_*}{\Phi}(y) = J_*\sqrt{2\pi v}\exp\left(-\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{v}\tilde{\wedge}(y)\right) \tag{1.4.7}$$

$$=\left(1+\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{v}\tilde{\wedge}+O(\varepsilon)\right)\left(1-\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{v}\tilde{\wedge}(y)+O(\varepsilon)\right)$$

$$=1-\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{v}\left(\tilde{\wedge}(y)-\langle\tilde{\wedge}\rangle\right)+O(\varepsilon)$$

de donde:

$$\langle g\rangle_* = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\Phi_*(y)\,dy \tag{1.4.8}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\Phi(y)\frac{\Phi_*}{\Phi}(y)\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\Phi(y)-\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{v}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\tilde{\wedge}(y)-\langle\tilde{\wedge}\rangle\right)g(y)\Phi(y)+O(\varepsilon)$$

$$=\langle g\rangle-\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{v}\left\langle g\left(\tilde{\wedge}-\langle\tilde{\wedge}\rangle\right)\right\rangle+O(\varepsilon)$$

$$=\langle g\rangle-\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{v}\left\langle\tilde{\wedge}\left(g-\langle g\rangle\right)\right\rangle+O(\varepsilon)$$

después:

$$\overline{\sigma}_*^2 = \left\langle f^2\right\rangle_*$$

$$=\left\langle f^2\right\rangle-\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{v}\left\langle\tilde{\wedge}\left(f^2-\left\langle f^2\right\rangle\right)\right\rangle+O(\varepsilon)$$

$$=\overline{\sigma}^2-\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{v}\left\langle\tilde{\wedge}\left(f^2-\left\langle f^2\right\rangle\right)\right\rangle+O(\varepsilon)$$

como:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{v^2}{\Phi}\frac{d}{dy}\left(\Phi\frac{d}{dy}\right),$$

tenemos:

$$\left\langle\tilde{\wedge}\left(f^2-\left\langle f^2\right\rangle\right)\right\rangle=\left\langle\tilde{\wedge}\left(\mathcal{L}_0\Phi\right)\right\rangle$$

$$=\left\langle\frac{v^2\tilde{\wedge}}{\Phi}\frac{d}{dy}\left(\Phi\phi'\right)\right\rangle$$

$$=-v^2\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\wedge}(y)\left(\Phi\phi'\right)(y)\,dy$$

$$=-v^2\int_{-\infty}^{+\infty}\wedge(y)\left(\Phi\phi'\right)(y)\,dy$$

$$=v^2\left\langle\wedge\phi'\right\rangle$$

hemos integrado por partes, por consiguiente,

$$\overline{\sigma}_*^2 = \overline{\sigma}^2 - v\sqrt{2\varepsilon}\langle \wedge\phi' \rangle + O(\varepsilon),$$

de donde:

$$\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}_*\right) = \mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}_*^2 - \overline{\sigma}^2\right)x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad (1.4.9)$$

$$= \mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right) - \frac{v\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\langle \wedge\phi' \rangle x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + O(\varepsilon).$$

<u>Desarrollo limitado de</u> $H^*(t,x)$

De acuerdo a 1.4.8, tenemos:

$$V_3^* = \frac{\rho v\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\left\langle f\phi_*' \right\rangle_*$$

$$= \frac{\rho v\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\left\langle f\phi_*' \right\rangle + O\left(\sqrt{\varepsilon}\right).$$

Esta ecuación es fácil de ver usando 1.4.7 y 1.4.8 que:

$$\left\langle f\phi_*' \right\rangle = \left\langle f\phi' \right\rangle + O\left(\sqrt{\varepsilon}\right),$$

de donde:

$$V_3^* = \frac{\rho v\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\left\langle f\phi' \right\rangle + O(\varepsilon) = V_3 + O(\varepsilon).$$

Por otro lado, la cantidad $\prod_0 = P_0^* - P_0$ verifica la EDP:

$$\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right)\prod_0 = \frac{v\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\langle \wedge\phi' \rangle x^2\frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2} + O(\varepsilon)$$

Con una condición terminal nula, entonces $\prod_0 = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$, i.e. $P_0^* = P_0 + O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$. Por consecuencia,

$$H^*(t,x) = V_3^*\left(2x^2\frac{\partial^2 P_0^*}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial^3 P_0^*}{\partial x^3}\right)(t,x) \qquad (1.4.10)$$

$$= \left(V_3 + O(\varepsilon)\right)\left(2x^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x) + x^3\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t,x) + O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\right)$$

$$= V_3\left(2x^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x) + x^3\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t,x)\right) + O(\varepsilon)$$

Conclusión:

Poniendo de un extremo a otro 1.4.9 y 1.4.10, obtenemos

$$\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right)\left(P_0^* + Q_1^*\right)$$

$$= \mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma *}\right)\left(P_0^* + Q_1^*\right) + \frac{v\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\langle \wedge\phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2\left(P_0^* + Q_1^*\right)}{\partial x^2} + O(\varepsilon)$$

$$= H^*(t,x) + \frac{v\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\langle \wedge\phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2\left(P_0^* + Q_1^*\right)}{\partial x^2} + O(\varepsilon)$$

$$= V_3\left(2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t,x)\right) + \frac{v\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\langle \wedge\phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2\left(P_0^* + Q_1^*\right)}{\partial x^2} + O(\varepsilon)$$

Pero, $P_0^* + O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$ y $Q_1^* = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$, entonces:

$$\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right)\left(P_0^* + Q_1^*\right)$$

$$= V_3\left(2x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x) + x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t,x)\right) + \frac{v\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}}\langle \wedge\phi' \rangle x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + O(\varepsilon)$$

$$= \left(V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + V x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}\right)(t,x) + O(\varepsilon)$$

lo que concluye la demostración

1.5 Calibración

El modelo introduce gran cantidad de parámetros $(\alpha, \beta, m, \rho, \gamma, f)$ pero solo tres son suficientes para determinar el precio corregido y las estrategias de cobertura estudiadas; $\overline{\sigma}, V_2$ y V_3. Estas son funciones de $(\alpha, \beta, m, \rho, \gamma, f)$. Fouque, Papanicolaou & Sircar aseguran que todo proceso ergódico Y y toda función $f \in L_\pi^2$ llevan a la existencia de los tres parámetros $\overline{\sigma}, V_2$ y V_3. En la práctica es esencial de poder estimar estos parámetros. Podríamos buscar los $\overline{\sigma}, V_2$ y V_3 tales que el precio corregido:

$$\left(P_0 + \widetilde{P}_1\right)(t,x) = P_0(t,x) - (T-t)\left(V_2 x^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}(t,x) + V x^3 \frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3}(t,x)\right)$$

es decir, "lo más próximo posible "de los precios observados, por ejemplo, para una opción de compra clásica. Elegiremos trabajar con las volatilidades implícitas, que son una forma de representar el precio a través de Black & Scholes.

1.5.1 El precio corregido de la opción de compra

En esta parte, veremos el caso particular de una call de vencimiento T y de precio de ejercicio $K : h(x) = (x-K)_+$. Admitamos que tenemos el derecho de aplicar los resultados anteriores, a pesar del hecho de que h no es de la clase

C^2. Deseamos dar el precio corregido de $C_0 + \widetilde{C}_1$ de la call. C_0 es el precio de la call Black & Scholes para la volatilidad $\overline{\sigma}$, por consiguiente,

$$C_0(t,x) = C_{BS}\left(t,x;K,T;\overline{\sigma}\right) = xN(d_+) - Ke^{-r(T-t)}N(d\_) \qquad (1.5.1)$$

donde:

$$\begin{cases} d_+ = \dfrac{\ln\left(\dfrac{x}{Ke^{-r(T-t)}}\right)}{\overline{\sigma}\sqrt{T-t}} + \dfrac{1}{2}\overline{\sigma}\sqrt{T-t} \\ d\_ = \dfrac{\ln\left(\dfrac{x}{Ke^{-r(T-t)}}\right)}{\overline{\sigma}\sqrt{T-t}} - \dfrac{1}{2}\overline{\sigma}\sqrt{T-t} \end{cases} \qquad (1.5.2)$$

y $N(d) = \int_{-\infty}^{d} g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$. Tenemos:

$$\frac{\partial d_+}{\partial x}(t,x) = \frac{1}{x\overline{\sigma}\sqrt{T-t}} > 0$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial x}(t,x) = N(d_+) > 0$$

$$\frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2}(t,x) = \frac{1}{x\overline{\sigma}\sqrt{T-t}}\, g(d_+) > 0$$

$$\frac{\partial^3 C_0}{\partial x^3}(t,x) = \frac{1}{x^2\overline{\sigma}\sqrt{T-t}}\, g(d_+) + \frac{1}{x^2\overline{\sigma}^2(T-t)}\, g'(d_+)$$

$$= -\frac{g(d_+)}{x^2\overline{\sigma}^2(T-t)}\left(d_+ + \overline{\sigma}\sqrt{T-t}\right)$$

El precio corregido de primer orden de la opción de compra es entonces:

$$\left(C_0 + \widetilde{C}_1\right)(t,x) = xN(d_+) - Ke^{-r(T-t)}N(d\_)$$

$$-\frac{xg(d_+)}{\overline{\sigma}^2}\left((V_2 - V_3)\overline{\sigma}\sqrt{T-t} - V_3 d_+\right)$$

1.5.2 Superficie de volatilidad implícita

Buscamos desarrollar la volatilidad implícita bajo la forma:

$$I(t,x) = I_0(t,x) + \sqrt{\varepsilon}I_1(t,x) + \varepsilon I_2(t,x) + \varepsilon\sqrt{\varepsilon}I_3(t,x) + \dots$$

Lo que deseamos es calcular los dos primeros coeficientes I_0 e I_1. Por definición, la volatilidad implícita,

$$C_{BS}\left(t,x;K,T;I(t,x)\right) = C^{obs}.$$

Si usamos nuestro modelo de mercado con volatilidad estocástica, tendremos:

$$C_{BS}\left(t,x;K,T;I\left(t,x\right)\right)=C_0\left(t,x\right)+\sqrt{\varepsilon}C_1\left(t,x\right)$$
$$+\varepsilon C_2\left(t,x\right)+\varepsilon\sqrt{\varepsilon}C_3\left(t,x\right)+...$$

Desarrollamos el término de la izquierda:

$$C_{BS}\left(t,x;K,T;I\left(t,x\right)\right)=C_{BS}\left(t,x;K,T;I_0\left(t,x\right)\right)+$$
$$+\sqrt{\varepsilon}I_1\left(t,x\right)\frac{\partial C_{BS}}{\partial\sigma}\left(t,x;K,T;I_0\left(t,x\right)\right)+...$$

La identificación de los términos da:

$$I_0\left(t,x\right)=\overline{\sigma}$$

y

$$I_1\left(t,x\right)=\frac{C_1\left(t,x\right)}{\frac{\partial C_{BS}}{\partial\sigma}\left(t,x;T,K;\overline{\sigma}\right)}$$

Es más fácil de trabajar con la cantidad $\tilde{I}_1=\sqrt{\varepsilon}I_1$. Como:

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial\sigma}\left(t,x;K,T;\overline{\sigma}\right)=x\sqrt{T-t}g\left(d_+\right),$$

se tiene:

$$\tilde{I}_1\left(t,x\right)=\frac{\tilde{C}_1\left(t,x\right)^{-}}{x\sqrt{T-t}g\left(d_+\right)}$$
$$=-\frac{\frac{xg\left(d_+\right)}{\overline{\sigma}^2}\left(\left(V_2-V_3\right)\overline{\sigma}\sqrt{T-t}-V_3d_+\right)}{x\sqrt{T-t}g\left(d_+\right)}$$
$$=-\frac{1}{\sigma}\left(\left(V_2-V_3\right)-V_3\frac{d_+}{\overline{\sigma}\sqrt{T-t}}\right)$$

El modelo ergódico de volatilidad estocástica genera entonces un smile:

$$I\left(t,x\right)=\overline{\sigma}-\frac{1}{\overline{\sigma}}\left(\left(V_2-V_3\right)-V_3\frac{d_+}{\overline{\sigma}\sqrt{T-t}}\right)+O\left(\varepsilon\right)$$

si explicitamos d_+, obtenemos:

$$I\left(t,x\right)=\overline{\sigma}-\frac{1}{\sigma}\left(V_2-V_3\left(\frac{r}{\overline{\sigma}^2}+\frac{3}{2}\right)+V_3\frac{\ln\frac{K}{x}}{\overline{\sigma}^2\left(T-t\right)}\right)+O\left(\varepsilon\right)$$

Cuando estudiamos la superficie de volatilidad implícita, nos estamos interesando en la dependencia en (K,T) de esta expresión. Ella es del tipo:

$$(K,T) \to a\frac{\ln\left(\frac{K}{x}\right)}{T-t} + b + O(\varepsilon) \qquad (1.5.3)$$

con:

$$\begin{cases} a = -\dfrac{V_3}{\bar{\sigma}^3} \\ b = \bar{\sigma} - \dfrac{1}{2}\left(V_2 - V_3\left(\dfrac{r}{\bar{\sigma}^2} + \dfrac{3}{2}\right)\right) \end{cases} \qquad (1.5.4)$$

V_2 y V_3 son pequeñas, de orden $\sqrt{\varepsilon}$, entonces a es pequeña y b es próxima de $\bar{\sigma}$.

En la práctica, solo observamos la superficie de volatilidad implícita empírica (en realidad no disponemos de algunos puntos), buscamos a y b de forma que la ecuación 1.5.3 calce al menos con la superficie de volatilidad implícita empírica e invertimos el sistema 1.5.4:

$$\begin{cases} V_3 = -a\bar{\sigma}^3 \\ V_2 = \bar{\sigma}\left(\bar{\sigma} - b - a\left(r + \dfrac{3}{2}\bar{\sigma}^2\right)\right) \end{cases}$$

Debemos tener previamente medida la volatilidad media $\bar{\sigma}$, por ejemplo, estudiando estadísticamente la varianza de los rendimientos empíricos $\frac{\Delta X}{X}$.

Observemos que, si nos detenemos en el primer orden, la volatilidad implícita prevista en el modelo de volatilidad estocástica es una función monótona de K, proporcional a $\ln(K)$. La aproximación al primer orden no permite generar un smile, es decir, una curva convexa decreciente y luego creciente. La volatilidad implícita 1.5.3 es convexa en K si y solo si $a < 0$ es decir $V_3 > 0$. En este caso, la aproximación al primer orden de la volatilidad implícita teórica es una función convexa decreciente que tiende al infinito cuando K tiende a 0. Para poder ver aparecer un smile, es necesario llevar el desarrollo al segundo orden.

1.6 Simulaciones numéricas

La hipótesis $\alpha \gg \frac{1}{T-t}$ permite obtener un desarrollo limitado, 1.5.3, del smile; ella permite explicar los smile de amplitud débil, del orden de $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Debemos entonces considerar valores de α del orden de $\frac{1}{T-t}$. No podemos usar el desarrollo limitado 1.5.3 y evidentemente no tenemos una fórmula cerrada para el precio de la call. Vamos a efectuar simulaciones numéricas. Busquemos que valorizar numéricamente el precio de las opciones y de las volatilidades implícitas, ya sea por la discretización de la EDP de valuación, o por el método Monte Carlo.

1.6.1 Esquemas numéricos para la EDP de valuación

<u>Método</u>

Recordemos la EDP verificada por el precio $P(t,x,y)$ de la opción europea de madurez T y de pay off $H = h(X_T) \in L^2(\mathbb{P}^*, \mathcal{F}_T)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}(X_t)^2 f(Y_t)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \rho \frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} X_t f(Y_t) \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{v^2}{\varepsilon}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$
$$+r\left(X_t \frac{\partial P}{\partial x} - P\right) + \frac{1}{2}(m - Y_t)\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \wedge \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

con la condición terminal $P(T,x,y) = h(x)$.

Si ponemos $Q(t,x,y) = P(t, e^x, y)$ entonces la función Q es la solución de la EDP

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{f(y)^2}{2}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \left(r - \frac{f(y)^2}{2}\right)\frac{\partial Q}{\partial x} - rQ + \frac{1}{\varepsilon}(m-y)\frac{\partial Q}{\partial y}$$
$$+\frac{v^2}{\varepsilon}\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \rho\frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} f(y)\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \wedge (t, e^x, y)\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

con la condición terminal $Q(T,x,y) = h(e^x)$

Suponemos a continuación que $\wedge = 0$. Sale de reemplazar $f(y)$ por $f(y+m)$, podemos elegir $m = 0$; y estará entonces centrada alrededor de 0, y la EDP se escribe:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{f(y)^2}{2}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \left(r - \frac{f(y)^2}{2}\right)\frac{\partial Q}{\partial x} - rQ$$
$$-\frac{1}{\varepsilon} y \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{v^2}{\varepsilon}\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \rho\frac{v\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} f(y)\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = 0$$

Nos situamos en las dos direcciones del espacio: buscamos una aproximación de $Q(t,x,y)$ para $x \in \left]-l_x, l_x\right[$ y $\varepsilon \left]-l_y, l_y\right[$. Se trata de elegir convenientemente l_x y l_y. Enseguida hacemos la discretización en el espacio. Consideramos N_x

puntos repartidos uniformemente sobre $\left]-l_x, l_x\right[$ y N_y puntos repartidos uniformemente sobre $\left]-l_y, l_y\right[$. Llamamos $h_x = \frac{2l_x}{N_x+1}$ y $h_y = \frac{2l_y}{N_y+1}$ a los pasos de discretización espacial y ponemos:

$$\begin{cases} x_i = -l_x + ih_x \\ y_j = -l_y + jh_y \end{cases}$$

para $(i, j) \in \{0,1,..., N_x+1\} \text{x} \{o,1...., N_y+1\}$. Entonces $x_0 = -l_x, XN_x + 1 = l_x$. Para $(i, j) \in \{1,..., N_x\} x \{1,..., N_y\}$, ponemos $[i, j] = (i-1)N_y + j$. Estamos buscando una familia $u(t)$ de vectores de talla $N_x \text{x} N_y$ tal que $u_{[i,j]}(t) \approx Q(t, x_i, y_j)$. Para hacer eso, usamos derivadas discretas centradas y segundas derivadas discretas, usando las correspondencias:

$$\frac{u_{[i+1,j]} - u_{[i-1,j]}}{2h_x}$$

$$\frac{u_{[i+1,j]} - 2u_{[i,j]} + u_{[i-1,j]}}{h_x^2}$$

$$\frac{u_{[i,j+1]} - u_{[i,j-1]}}{2h_y}$$

$$\frac{u_{[i,j+1]} - 2u_{[i,j]} + u_{[i,j-1]}}{h_y^2}$$

$$\frac{u_{[i+1,j+1]} - u_{[i-1,j-1]} - u_{[i+1,j-1]} + u_{[i-1,j-1]}}{4h_x h_y}$$

El operador espacial discreto es entonces una matriz A de talla $N_x N_y x N_x N_y$ tridiagonal por bloques, cada uno de los bloques de las tres diagonales son ellos mismos tri diagonales. Mas exactamente, si usamos las condiciones nulas de Dirichlet, podemos descomponer la matriz (usaremos D por Dirichlet) $A = A^D$ en N_x^2 bloques $(A_{i,k}) 1 \le i \le N_x, 1 \le k \le N_x$ de talla $N_y \text{x} N_y$:

$$A = A^D = \begin{pmatrix} A_{1,1}^D & A_{1,2}^D \cdots & A_{1,N_x}^D \\ A_{2,1}^D & A_{2,2}^D \cdots & A_{2,N_x}^D \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ A_{N_x,1}^D & A_{N_x,2}^D \cdots & A_{N_x,N_x}^D \end{pmatrix}$$

Si $|i-k| > 1,\ A_{i,k}^D$ es la matriz nula. $A_{i,i-1}^D$ es tri diagonal y tiene por coeficientes:

$$\left(A_{i,i-1}^{D}\right)_{j,j-1} = \frac{\rho v\sqrt{2} f\left(y\right)}{4\sqrt{\varepsilon} h_x h_y},$$

$$\left(A_{i,i-1}^{D}\right)_{j,j} = \frac{f\left(y_j\right)^2}{2h_x^2} - \frac{1}{2h_x}\left(r - \frac{f\left(y_j\right)^2}{2}\right),$$

$$\left(A_{i,i-1}^{D}\right)_{j,j+1} = \frac{\rho v\sqrt{2} f\left(y_j\right)}{4\sqrt{\varepsilon} h_x h_y}$$

$A_{i,i}^{D}$ es tri diagonal y tiene por coeficientes:

$$\left(A_{i,i}^{D}\right)_{j,j-1} = \frac{y_j}{2\varepsilon h_y} + \frac{v^2}{\varepsilon h_y^2}$$

$$\left(A_{i,i}^{D}\right)_{j,j} = -\frac{f\left(y_j\right)^2}{h_x^2} - r - \frac{2v^2}{\varepsilon h_y^2},$$

$$\left(A_{i,i}^{D}\right)_{j,j+1} = -\frac{y_j}{2 \in h_y} + \frac{v^2}{\varepsilon h_y^2}.$$

Finalmente, $A_{i,i+1}^{D}$ es tri diagonal y tiene por coeficientes:

$$\left(A_{i,i+1}^{D}\right)_{j,j-1} = -\frac{\rho v\sqrt{2} f\left(y_j\right)}{4\sqrt{\varepsilon} h_x h_y},$$

$$\left(A_{i,i+1}^{D}\right)_{j,j} = \frac{f\left(y_j\right)^2}{2h_x^2} + \frac{1}{2h_x}\left(r - \frac{f\left(y_j\right)^2}{2}\right),$$

$$\left(A_{i,i+1}^{D}\right)_{j,j+1} = \frac{\rho v\sqrt{2} f\left(y_j\right)}{4\sqrt{\varepsilon} h_x h_y}$$

Se trata ahora de que las variables sean discretas en tiempo. Se nos ha dado $\theta \in [0,1]$, un entero $M \geq 1$, un paso de tiempo $k = T / M$ y, inspirándonos en la ecuación 1.3.13, buscamos una familia de $M+1$ vectores $u^n, 0 \leq n \leq M$ de talla $N_x N_y$, tal que $u_{[i,j]}^{M} = h\left(e^{x_i}\right)$ y, para $0 \leq n \leq M-1$,

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{k} + \theta A u^n + \left(1-\theta\right) A u^{n+1} = 0$$

lo que se escribe:

$$Bu^n = Cu^{n+1}$$

con:

$$B = I - k\theta A, \qquad C = I + k\left(1-\theta\right) A$$

Numéricamente, invertimos la matriz B por un método iterativo. Esto solo se puede hacer (acá trabajo con la norma $\| \|_\infty$). Para $v \in \mathbb{R}^d, \|v\|_\infty = \max_{1\le i\le d} |v_i|$) si $k\theta\|A\| < 1$ Por lo tanto será necesario tomar un paso de discretización temporal lo suficientemente pequeño.

En el caso de las condiciones nulas de Neumann, la matriz $A = A^N$ (N por Neumann) se escribe:

$$A = A^N \begin{pmatrix} A_{1,0}^N + A_{1,1}^N & A_{1,2}^N \cdots & A_{1,N_x}^N \\ A_{2,1}^N & A_{2,2}^N \cdots & A_{2,N_x}^N \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ A_{N_x,1}^N & A_{x,2}^N \cdots & A_{N_x,N_x}^N + A_{N_x,N_x+1}^N \end{pmatrix}$$

donde, para todos los i,k

$$A_{i,k}^N = \begin{pmatrix} \left(A_{i,k}\right)_{0,1}^D + \left(A_{i,k}\right)_{1,1}^D & \left(A_{i,k}\right)_{1,2}^D \cdots & \left(A_{i,k}\right)_{1,N_y}^D \\ \left(A_{i,k}\right)_{2,1}^D & \left(A_{i,k}\right)_{2,2}^D \cdots & \left(A_{i,k}\right)_{2,N_y}^D \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \left(A_{i,k}\right)_{N_y,1}^D & \left(A_{i,k}\right)_{N_y,2}^D \cdots & \left(A_{i,k}\right)_{N_y,N_y}^D + \left(A_{i,k}\right)_{N_y,N_y+1}^D \end{pmatrix}$$

Bajo reserva de convergencia del esquema numérico, $u_{[i,j]}^0$ es una aproximación de $Q\left(0, x_i, y_j\right)$.

Resultados

Hemos usado las condiciones nulas de Neumann. Las funciones se prueban $f(y) = me^y$, $f(y) = m'(m+y)$ y $f(y) = m'|m+y|$. Si probamos con $\alpha = 0.1,1,10$, $\rho = -0.8, 0.8$. Y $v = 0.5$. Obtendremos la superficie de precios y la curva del smile.

1.6.2 El método Monte Carlo

Definición Acá también suponemos $\wedge = 0$ y, cambiamos $f, m = 0$. La ecuación diferencial estocástica se escribe así:

$$\begin{cases} dX_t = rX_t dt + \sigma_t X_t dW_t^* \\ \sigma_t = f\left(Y_t\right) \\ dY_t = -\alpha Y_t dt + \beta d\widehat{Z}_t^* \end{cases} \qquad (1.6.1)$$

Nos damos $M \geq 1$ sin tiempo: ponemos $\Delta t = T / M$ y $t_n = n\Delta t$. Dicho de otra forma, consideramos la sub división regular:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{M-1} < t_M = T$$

del intervalo $\left[0,T\right]$. Podemos hacer discreta la fórmula 1.6.1 de varias maneras. La más simple consiste en considerar el esquema de Euler $\left(\overline{X}_{tn}, \overline{Y}_{tn}\right)_{0\leq n\leq M}$ definido por:

$$\begin{cases} \overline{X}_{t_{n+1}} - \overline{X}_{t_n} = r\overline{X}_{t_{n+1}}\Delta t + f\left(\overline{X}_{t_n}\right)\overline{X}_{t_n}\sqrt{\Delta t}\widehat{G}_n \\ Y_{t_{n+1}} - \overline{Y}_{t_n} = -\alpha\overline{Y}_{t_n}\Delta t + \beta\sqrt{\Delta t}\left(\rho\widehat{G}_n + \sqrt{1-\rho^2}\breve{G}_n\right) \end{cases} \left(13.6.2)\right)$$

donde $\left(\widehat{G}_n\right)_{0\leq n\leq M-1}$ y $\left(\breve{G}_n\right)_{0\leq n\leq M-1}$ son dos espacios independientes de variables aleatorias independientes con la misma ley gaussiana centrada reducida. Observemos que la dinámica de $\overline{Y}$ es autónoma.

<u>Errores estadísticos y de trayectorias</u> Lanzamos N simulaciones de trayectorias de acuerdo a la fórmula 1.6.2 y estimamos el valor en $t = 0$ de la opción de pay off $H = h\left(X_T\right)$ por la media empírica $e^{-rT}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h\left(\overline{X}_T^{(i)}\right)$. Haciendo esto se cometen dos errores:

1.- Un error de naturaleza estadística, de orden $1/\sqrt{N}$:

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h\left(\overline{X}_T^{(i)}\right) - \mathbb{E}^*\left[h\left(\overline{X}_T\right)\right]\right) \to \mathcal{N}\left(0,1\right)$$

en la ley cuando N tiende al infinito, donde $\sigma^2 = Var\left[\overline{X}_T\right]$. En realidad, cometemos también un error sobre σ^2 que lo estimamos al mismo tiempo que $\mathbb{E}^*\left[h\left(\overline{X}_M\right)\right]$ por la cantidad:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h\left(\overline{X}_T^i\right)^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h\left(\overline{X}_T^i\right)^2\right)$$

Sin embargo, constatamos en la práctica que σ_n^2 converge rápidamente hacia un límite que parece depender poco del paso del tiempo Δt. Esto nos permite controlar el $\frac{2\sigma}{\sqrt{N}}$ de error estadístico, uniformemente en Δt.

2.- Un error de discretización temporal $\left|\mathbb{E}^*\left[h\left(\overline{X}_T\right)\right]-\mathbb{E}^*\left[h\left(X_T\right)\right]\right|$, de orden $\Delta t = T/M$. Como los coeficientes de nuestra difusión bidimensional son lipschitzianos, podemos mejorar fácilmente este factor de discretización por una cantidad de orden $\sqrt{\Delta t}$ usando los resultados de convergencia L^2 y tendremos casi con seguridad:

$$\exists C > 0, \forall M \geq 1, \mathbb{E}^*\left[\sup_{0\leq i\leq M}\left|\overline{X}_{t_i - X_{t_i}}\right|^2\right] \leq C\Delta t,$$

$$\forall \alpha < \frac{1}{2}, M^{\infty} \sup_{0\leq i\leq M}\left|\overline{X}_{t_i - X_{t_i}}\right| \to M_{\to\infty} 0 \qquad \mathbb{P}^* - ps$$

En realidad, lo podemos hacer mucho mejor. Bajo las hipótesis de regularidad sobre los coeficientes de difusión y sobre el pay off, Talay & Tubaro muestran que:

$$\mathbb{E}^*\left[h\left(\overline{X}_T\right)\right]-\mathbb{E}^*\left[h\left(X_T\right)\right] = C\Delta t + O\left(\Delta t^2\right) \qquad (1.6.3)$$

donde C es una constante dependiente de los coeficientes de difusión. Los valores iniciales x e y de X y de Y, del pay off h, de T, pero independiente de Δt. Talay & Tubaro introducen las hipótesis:

- $(H0)$ Los coeficientes $bx(x,y), \sigma_x(x,y), b_y(x,y)$ y $\sigma_y(x,y)$ de la difusión son funciones de C^∞ donde todas las derivadas son delimitadas
- $(H1)$ El pay of $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase C^∞ y para todo multi índice γ de derivación,

  $$\exists p \in \mathbb{N}, \exists C_T > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \left|\partial_\gamma h(x,y)\right| \leq C_T\left(1+\left\|x,y\right\|^p\right)$$

Entonces $(H0)$-$(H1)$ implica 1.6.3. Pero para un call o un put, $(H1)$ no es verificada. Por otro lado, $(H0)$ no es verificada para el caso $f(y) = me^y$.

Los mismos autores introducen otra hipótesis $(H2)$ que asociada a $(H0)$ es suficiente para obtener la ecuación 1.6.3 solamente para los pay off medibles y delimitados. Lo que permite tratar el caso de la put.

Es entonces natural elegir N y M de forma que $N \approx M^2$, es decir para que los dos errores sean del mismo orden. (falta calcular la constante $C_{\Delta t}$ como factor de Δt).

<u>Reducción de la varianza</u> Uno mejora la velocidad del cálculo usando cualquiera de los dos métodos de reducción de varianza:

1.- El uso de variables antitéticas[2] divide por cuatro las llamadas a la función random: si lanzamos $N/4$ simulaciones de cuatro juegos de trayectorias obtenidas vía los dos cursos independientes de gaussianas centradas reducidas independientes $\left(\widehat{G}_n\right)_{0\le n\le M-1}$ y $\left(\breve{G}_n\right)_{0\le n\le M-1}$ usando respectivamente los cursos $\left(\widehat{G}_n,\breve{G}_n\right)_{0\le n\le M-1}$, $\left(\widehat{G}_n,-\breve{G}_n\right)_{0\le n\le M-1}$, $\left(-\widehat{G}_n,\breve{G}_n\right)_{0\le n\le M-1}$ y $\left(\widehat{-G_n},-\breve{G}_n\right)_{0\le n\le M-1}$ que tienen todos la misma ley.

2.- En el caso en que α es grande frente a $\frac{1}{T-t}$, sabemos que el precio de la opción es cercano de la solución P_0 de la EDP $\mathcal{L}_{BS}\left(\overline{\sigma}\right)P_0=0$ con la condición terminal $P_0\left(T,x\right)=h\left(x\right)$. Si disponemos de una fórmula para P_0, podemos reducir la varianza introduciendo el movimiento browniano geométrico $\overline{X}$:

$$dX_t^{bs}=rX_t^{bs}dt+\overline{\sigma}X_t^{bs}dW_t^*,\qquad \overline{X}_0=x$$

y tomando en cuenta que:

$$\mathbb{E}^*\left[h\left(\overline{X}_T\right)\right]=\mathbb{E}^*\left[h\left(\overline{X}_T\right)-h\left(X_T^{bs}\right)\right]+P_0\left(0,x\right)$$

Esperamos que $Var\left[h\left(\overline{X}_T\right)-h\left(X_T^{bs}\right)\right]<Var\left[h\left(\overline{X}_T\right)\right]$. Podemos introducir un parámetro q que minimice $Var\left[h\left(\overline{X}_T\right)-qh\left(X_T^{bs}\right)\right]$ y escribir:

$$\mathbb{E}^*\left[h\left(\overline{X}_T\right)\right]=\mathbb{E}^*\left[h\left(\overline{X}_T\right)-qh\left(X_T^{bs}\right)\right]+qP_0\left(0,x\right)$$

La mejor q posible es:

$$q=\frac{\operatorname{cov}\left(h\left(\overline{X}_T\right),h\left(X_T^{bs}\right)\right)}{Var\left[h\left(X_T^{bs}\right)\right]}\qquad(1.6.4)$$

que la podemos estimar en la simulación. Atención, si estimamos q durante la simulación, digamos por $\hat{q}N$, esta última es función de todas las corridas gaussianas, entonces correlacionado a $\overline{X}_T$ y X_T^{bs}.

Por consecuencia, las variables aleatorias:

$$h\left(\overline{X}_T^{(i)}\right)-\hat{q}Nh\left(X_T^{bs,(i)}\right)$$

---

[2] Variables antitéticas se llaman a dos conjuntos muy especiales de torrentes (streams) de números pseudo aleatorios: u1, u2, u3, u4, u5 ... y su complementario (1-u1), (1-u2), (1-u3), (1-u4) ..

no son necesariamente independientes, el estimador:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(h\left(\overline{X}_T^{(i)}\right)-\hat{q}_p h\left(X_T^{bs(i)}\right)\right)$$

acá todavía, $\hat{q}_p$ es una variable aleatoria. Es necesario tener en cuenta su varianza para determinar un intervalo de confianza relativo al estimador de arriba.

En fin, podemos escoger a priori un q determinista (por ejemplo $q=1$). En ese caso, la estimación del intervalo de confianza puede estar lejos del mejor q posible.

Igual para los pequeños valores de α, podemos darle un valor de $\overline{\sigma}$ y aplicar el método. En la práctica, para $q=1$ y $\alpha=1$, observamos que la varianza se reduce de un factor 8 aproximadamente, y para una larga gama de $\overline{\sigma}$.

<u>Extrapolación de Romberg</u> Bajo reserva que el error de discretización es de orden Δt, es decir que si hemos desarrollado bien 1.6.3, podemos aplicar el método de extrapolación de Romberg: estimamos $\mathbb{E}^*\left[h\left(\overline{X}_T\right)\right]$ para dos valores del paso del tiempo, Δt y $\Delta t/2$, y deducimos una estimación de:

$$Z_T^{\Delta t}=2\mathbb{E}^*\left[h\left(\overline{X}_T^{\Delta t/2}\right)\right]-\mathbb{E}^*\left[h\left(\overline{X}_T^{\Delta t}\right)\right]$$

$Z_T^{\Delta t}$ es una aproximación de orden 2 en tiempo de $\mathbb{E}^*\left[h\left(X_T\right)\right]$ ya que 1.6.3 implica:

$$Z_T^{\Delta t}-\mathbb{E}^*\left[h\left(\overline{X}_T^{\Delta t}\right)\right]=O\left(\Delta t^2\right)$$

Para medir numéricamente este error, es esencial poder estimar la constante en factor de Δt^2. Para hacerlo, suponemos que disponemos un desarrollo limitado

$$\mathbb{E}^*\left[h\left(\overline{X}_T^{\Delta t}\right)\right]-\mathbb{E}^*\left[h\left(X_T\right)\right]=C_1^{'}\Delta t+C_2^{'}\Delta t^2+o\left(\Delta t^2\right)$$

Entonces como existe un C_2 tal que:

$$Z_T^{\Delta t}-\mathbb{E}^*\left[h\left(X_T\right)\right]=C_2\Delta t^2+o\left(\Delta t^2\right),$$

y

$$Z_T^{\Delta t}-Z_T^{\Delta/2}=\frac{3}{4}C_2\Delta t^2+o\left(\Delta t^2\right)$$

Esto nos permite de estimar a posteriori el error debido a la discretización temporal $C_2\Delta t^2$ por:

$$C_2^{\Delta t}\Delta t^2 = \frac{4}{3}\left(Z_T^{\Delta t} - Z_T^{\Delta t/2}\right)$$

En la práctica, por ejemplo, para estimar la put europea de vencimiento T ,

- Fijamos un gran número de tiradas N
- Nos damos un paso de tiempo mínimo $\delta > 0$
- Inicializamos Δt a T
- Para este valor de Δt, estimamos la put por la media empírica $Z_N^{\Delta t}$ que estime $Z_T^{\Delta t}$ y estimamos el radio

  $\varepsilon_s^{\Delta t} = 2\sqrt{\frac{Var\left[Z_N^{\Delta t}\right]}{N}}$ del error estadístico

- Dividimos Δt por 2, y recomenzamos las operaciones de la línea precedente, y calculamos

  $$C_{2,N}^{\Delta t}\Delta t^2 = \frac{4}{3}\left(Z_N^{\Delta t} - Z_N^{\Delta t/2}\right)$$

- Nos detenemos en el momento en que $C_{2,N}^{\Delta t}\Delta t^2 \le \varepsilon_s^{\Delta t}$ o cuando $\Delta t < \delta$. En efecto, los valores de $C_{2,N}^{\Delta t}\Delta t^2$ inferiores a $\varepsilon_s^{\Delta t}$ no tienen ninguna significancia ya que el valor que se calcula tiene una precisión de $\pm\varepsilon_s^{\Delta t}$.

Observemos que salvo para aquellos grandes valores de Δt, tenemos $\varepsilon_s^{\Delta t} \approx \varepsilon_s^{\Delta t/2}$ Obtenemos entonces un error estadístico uniforme en Δt.

Al final, tendremos un poco de tiempo en Δt y tendremos confianza en la estimación

$$Z_N^{\Delta t} \pm 2\varepsilon_s^{\Delta t}$$

Para la put, esta estimación del error es:

- Global y,
- No asintótica

1.7 Perspectivas

El verdadero gran problema es el de la calibración de este modelo. Hemos mostrado como calibrar el modelo en el caso que α es grande, a través de los tres parámetros $\overline{\sigma}, V_2$ y V_3. Pero generalmente las smile empíricas invalidan esta hipótesis en α. Es necesario entonces, luego de haber supuesto $\wedge = 0$ por ejemplo, encontrar los valores de α, m, v, ρ, Y_0 y la función f que permiten, con el auxilio de computadoras, encontrar el smile empírico observado el día de hoy. Podremos, fijar v y f -entonces m -y buscar los tres parámetros α, ρ y Y_0 que nos permitan acercarnos de la mejor manera al smile del día de hoy.