USMP UNIVERSIDAD DE SAN MARTIN DE PORRES

FACULTAD DE CIENCIAS ADMINISTRATIVAS Y RECURSOS HUMANOS

MEDICIÓN DEL RIESGO DE VALOR FUTURO

WORKING PAPER

Eduardo Court M.
Universidad San Martín de Porras
Escuela de Post Grado

En los últimos años se ha prestado una atención cada vez mayor a los métodos que permiten asociar una medida cuantificada a un riesgo, posiblemente derivado de una situación financiera o contingencias aseguradas por una compañía de seguros, incluyendo estos últimos riesgos mayor variedad, como desastres naturales, pandemias o riesgos industriales.

En general, un riesgo es un evento que puede ocurrir o no (es decir, un evento aleatorio) y tiene algunas consecuencias adversas. Es natural modelar el riesgo como una variable aleatoria que representa la cantidad aleatoria de pérdidas que puede experimentar una empresa. Se puede suponer que las variables aleatorias que modelan las pérdidas por riesgo no son negativas (similar al riesgo de seguro). En general, el riesgo se puede definir como una variable aleatoria que representa un valor futuro, pero nos enfocamos en el riesgo de pérdida., sin ganancias.

1 Notaciones y definiciones

Considere un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$. Donde:

- Ω representa el conjunto de todos los escenarios posibles;
- $\mathcal{A}$ es una tribu;
- P es una medida de probabilidad.

El valor futuro de un escenario es incierto y puede ser representado por un v.a. X. Esta es una función de todos los escenarios posibles a los números reales, $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Definición 1.1. *(riesgo) Sea* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espacio medible donde* Ω *es el espacio de resultado y* $\mathcal{A}$ *es la tribu definida anteriormente. Un riesgo es una variable aleatoria definida en* $(\Omega, \mathcal{A})$.

Los elementos X de $\mathcal{X}$ son variables aleatorias, que representan pérdidas. Sea $\mathcal{X}$ el conjunto de variables aleatorias de pérdida real definidas sobre un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$. $\mathcal{X}$ contiene las constantes y es estable por suma y multiplicación por un escalar.

Como su nombre indica, una medida de riesgo cuantifica el peligro inherente a un riesgo representado por un valor aleatorio X (medir riesgos significa establecer una correspondencia entre la variable aleatoria que representa el riesgo y un número real no negativo).

Definición 1.2. Una medida de riesgo $\rho(X)$ (posiblemente infinita) es una ρ funcional que asigna un valor real a la variable aleatoria X de las pérdidas asociadas con un riesgo tal que:

$$\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \qquad (1)$$

Dada esta definición de riesgo, expectativa, varianza y momentos de orden superior, las medidas basadas en cuantiles como el VaR y las expectativas condicionales como el $CVaR$ son todas medidas de riesgo. Si $X > 0$ tenemos una pérdida y si $X < 0$ tenemos una ganancia.

Hay muchas medidas de riesgo introducidas en la literatura y la práctica, y elegir una medida de riesgo puede resultar difícil. Un enfoque para abordar el tema de la medición del riesgo es comenzar con una lista de propiedades que debe satisfacer una medición del riesgo.

Para satisfacer la necesidad de principios teóricos y prácticos, es habitual que una medición de riesgo verifique una serie de propiedades. En el artículo fundamental de Artzner & al [1999]. Se introdujo una lista de propiedades axiomáticas para una buena medida del riesgo. La verificación de estas propiedades conduce a la noción de una medición de riesgo coherente.

Definición 1.3. *Se dice que dos riesgos* X, Y *son comonotónicos si existe un v.a.* z *y funciones no decrecientes* h_1*,* h_2 *tales que* $X = h_1(z), Y = h_2(z)$*. En particular, los riesgos comonotónicos siempre se pueden representar por* $X = F_X^{-1}(U), Y = F_Y^{-1}(U)$*, donde* U *es un v.a. de fdr uniforme y* $F_X(.)$ *y* $F_Y(.)$ *Es el fdr de* X *e* Y *respectivamente*.

Definición 1.4. *(Comonotonicidad) Se dice que dos variables aleatorias con valores reales* X *e* Y *en* $(\Omega, \mathcal{F})$ *son comonotónicas si*:

$$\left(X(\omega) - X(\omega')\right)\left(Y(\omega) - Y(\omega')\right) \geq 0, \forall (\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega$$

Proposición 1.5. *Para dos variables aleatorias con valores reales* X *e* Y *en* $(\Omega, \mathcal{F})$*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

i. X *e* Y *son comonotónicos,*
ii. *Existe un v.a.* Z *en* $(\Omega, \mathcal{F})$ *y dos funciones no decrecientes* f *y* g *en* $\mathbb{R}$ *tales que* $X = f(Z)$ *e* $Y = g(Z)$*.*

Definición 1.6. *(invariancia de la ley) Una medida de riesgo* $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *que satisface* $\rho(X) = \rho(Y)$ *para todo* $X, Y \in \mathcal{X}$ *tal que* X *e* Y *tienen la misma distribución por debajo de* P *se denomina medida de riesgo de invariancia en ley*.

Definición 1.7. *(Convexidad y concavidad) Una función* ψ*, definida sobre un intervalo* I*, es convexa sobre* I *si la parte del plano ubicada sobre la curva es convexa, es decir, si algún arco de su curva representativa se ubica debajo de la cadena correspondiente. Esta definición se traduce en:*

$$\psi\left(kx_1 + (1-k)x_2\right) \leq k\psi(x_1) + (1-k)\psi(x_2)$$

$\forall t \in [0,1]$ *y* $\forall x_1, x_2 \in I$*. Si* $-\psi$ *es convexo,* ψ *se dice que es cóncavo.*

Para las definiciones de todos los axiomas, X e Y son variables aleatorias que representan la pérdida, $c \in \mathbb{R}$ es un escalar que representa la pérdida y ρ es una medida de riesgo.

Axioma 1. Invarianza de traslación: para cualquier constante $c, \rho[X + c] = \rho[X] + c$;

Axioma 2. Monotonicidad: si $X < Y$ para todos los resultados posibles, entonces $\rho[X] \leq \rho[Y]$;

Axioma 3. Homogeneidad positiva: para cualquier c real positivo, $\rho[cX] = c\rho[X]$.

Axioma 4. Subaditividad: $\rho[X + Y] \leq \rho[X] + \rho[Y]$;

Axioma 5. Convexidad: $\forall X, Y \in \mathcal{X}$

$$\rho\left[kX + (1-k)Y\right] \leq k\rho[X] + (1-k)\rho[Y] \qquad (2)$$

Axioma 6. Invarianza en la ley:

$$X = Y \Rightarrow \rho[X] = \rho[Y] \qquad (3)$$

Axioma 7. Aditividad comonotónica:

$$\rho[X+Y] = \rho[X] + \rho[Y] \text{ donde } X, Y \text{ son comonótonas } \quad (4)$$

Artzner & al. [1999] analizaron las medidas de riesgo y establecieron un conjunto de axiomas que deberían ser deseables para cualquier medida de riesgo. Se dice que cualquier medida de riesgo que satisfaga estos axiomas es consistente.

Definición 1.8. (medida de riesgo consistente) una medida de riesgo $\rho[X]$ se dice que es consistente si satisface las propiedades

1. Invarianza por traducción,
2. Monotonicidad,
3. homogeneidad positiva,
4. Subaditividad.

Esta definición axiomática es la piedra angular de una teoría muy rica que extrae sus módulos del análisis funcional y tiene interesantes interpretaciones económicas.

Interpretación de los 4 axiomas:

Axioma 1. Este axioma significa que agregar una cantidad fija al riesgo cambiará el valor de medida del riesgo en la misma cantidad. Esto entonces garantiza que $\rho[X - \rho[X]] = 0$.

Axioma 2. Este axioma es intuitivo y expresa un requisito mínimo: si el riesgo Y es mayor que el riesgo X, entonces las medidas correspondientes deben satisfacer la misma desigualdad.

Axioma 3. Este axioma significa que medir una proporción c de un riesgo equivale a considerar la medida de el por la misma proporción.

Axioma 4. “una fusión no crea un riesgo adicional”, dicen Artzner & al. [1999]. El razonamiento detrás de este axioma es integrar la idea de diversificación, es decir, la fusión de dos riesgos, X_1 y X_2 con medidas asociadas $\rho[X_1]$ y $\rho[X_2]$ creará el riesgo global $X = X_1 + X_2$ con una medida $\rho[X]$ menor o igual que la suma de las medidas asociadas $\rho[X_1] + \rho[X_2]$. Este axioma es más conocido porque el VaR no cumple esta condición en determinadas situaciones.

Otra forma de formalizar una medida de riesgo coherente es el teorema de representación de una medida de riesgo coherente:

Teorema 1.9. *Una medida de riesgo es consistente si y solo si existe una familia $\mathcal{P}$ de medida de probabilidad sobre todos los estados de la naturaleza, tales como*:

$$\rho(X) = \sup\left\{\mathbb{E}_{\mathrm{P}}\left(X \middle| P \in \mathcal{P}\right)\right\} \qquad (5)$$

Ver Artzner & al. [1999] para una demostración.

Observación 1.10. *El valor en riesgo, aunque se usa ampliamente en finanzas, no es una medida de riesgo consistente porque no es subaditivo; lo mismo ocurre con la varianza. Por otro lado, el CVaR es una medida de riesgo coherente*.

Definición 1.11. *Las medidas de riesgo que satisfacen las propiedades (1) y (2) de la Definición 3.1.8 se denominan medidas de riesgo monetario*.

Introducimos aquí una relajación de la propiedad de coherencia. En efecto, en muchos casos no se verifica la propiedad de homogeneidad positiva, es decir, el riesgo no crece linealmente con respecto al tamaño de la cartera. Para tener en cuenta el riesgo de liquidez, Föllmer y Schied [2002a] proponen rechazar el axioma de homogeneidad. Al hacer esto, definen un nuevo conjunto de medidas de riesgo denominadas convexas, que engloban las medidas de riesgo coherentes.

Las críticas a los axiomas de sutileza y homogeneidad positiva han llevado al estudio de medidas de riesgo convexo (ver definición 1.7). Una medida de riesgo convexa satisface los mismos axiomas que una medida de riesgo consistente, excepto que los axiomas de sutileza y homogeneidad positiva son reemplazados por el axioma de convexidad (Axioma 5).

Si los axiomas (axioma 3) y (axioma 4) se reemplazan por el axioma de convexidad (axioma 5), la medida de riesgo ρ se denomina medida de riesgo convexa.

Definición 1.12. Una medida de riesgo ρ definida a partir de un conjunto de variables aleatorias convexas $\mathcal{X}$ con valor real se dice que es convexa (ver Föllmer y Schied [2002a]) si satisface los siguientes axiomas:

1. Invarianza por traducción,
2. Monotonicidad,
3. Convexidad.

Interpretación. La propiedad de la convexidad dice que la posición $\rho\left[kX+(1-k)Y\right]$ es menos riesgosa que las posiciones $k\rho[X]$ y $(1-k)\rho[Y]$ tomadas individualmente. Las medidas de riesgo convexo se presentaron y estudiaron por primera vez en (Föllmer y Schied [2002b]).

Observación 1.13.

- De la Definición 1.11, por lo tanto, también podemos decir que una medida de riesgo monetario con propiedad de convexidad como en 1.12 se llama una medida de riesgo convexo.
- Cuando la medida de riesgo ρ está normalizada (es decir, $\rho(0)=0$) y satisface la propiedad de homogeneidad positiva, entonces el axioma de convexidad es equivalente al axioma de subaditividad. Por lo tanto, la propiedad de la convexidad tiene algunos aspectos de la disminución del riesgo bajo diversificación como para el axioma de subaditividad.
- Una medida de riesgo consistente es una medida de riesgo convexa. Sin embargo, una medida de riesgo convexa no es necesariamente consistente porque no puede satisfacer las propiedades de subaditividad y homogeneidad positiva de la Definición 1.8. Si una medida de riesgo convexa es positivamente homogénea, y también es subaditiva.

Como en Artzner & al. [1999] para el caso de una medida de riesgo coherente, damos aquí un teorema de representación para la medida de riesgo convexa. Sea $\mathcal{X}$ el espacio de funciones con valores reales sobre un conjunto finito Ω, y $\mathcal{Q}$ es el conjunto de todas las medidas de probabilidad en Ω.

Teorema 1.14. (Teorema de representación) *Cualquier medida de riesgo convexa* ρ *definida de* $\mathcal{X}$ *a valores en* $\mathbb{R}$ *se puede escribir en la forma*:

$$\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \left(\mathbb{E}[-X] - \alpha(\mathbb{Q})\right) \tag{6}$$

donde $\mathcal{Q}$ *es una familia de medidas de probabilidad sobre el espacio de estados de la naturaleza y* α *es un funcional sobre* $\mathcal{Q}$ *dado por*:

$$\alpha(\mathbb{Q}) = \sup_{X\in\mathcal{A}_p} \left(\mathbb{E}[-X]\right)$$

y

$$\mathcal{A}_p = \left\{X \in \mathcal{X} \middle| \rho[X] \leq 0\right\}$$

Tenga en cuenta que el Teorema 1.14 incluye el teorema de representación para la medida de riesgo coherente (Teorema 1.9) como un caso especial. De hecho, es fácil ver que ρ satisface la propiedad de homogeneidad positiva, es decir, ρ será una medida consistente de riesgo, si y solo si la función de penalización anterior $\alpha(.)$ (Ver Föllmer y Schied [2002a]) toma solo el valor 0 y $+\infty$. En este caso, el teorema 1.14 implica la representación 5 en términos del conjunto $Q = \left\{Q \in \mathcal{P} \middle| \alpha(Q) = 0\right\}$, y la representación en 6 se simplifica a:

$$\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} \left(\mathbb{E}[-X]\right)$$

A continuación, presentamos ejemplos de medidas comúnmente utilizadas en la gestión de riesgos.

2 Algunas medidas de riesgo habituales

2.1 La varianza

La varianza es una medida de la dispersión de una variable aleatoria alrededor de su media. Si X es una variable aleatoria cuadrada integrable, su varianza se define por:

$$Var(X) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(\mathbb{X})\right)^2\right]$$

2.2 Valor en riesgo

Una de las medidas de riesgo más populares es el valor en riesgo (VaR), también conocido como "valor en riesgo".

Definición 2.1. *Llamamos Valor en riesgo del nivel* $\alpha \in (0,1)$ *el cuantil del nivel* α ,

o

$$
\begin{aligned}
VaR_{\alpha}[X] = F^{-1}(\alpha) &= inf\{x : P[X > x] \leq 1-\alpha\} \\
&= inf\{x : P(X \leq x) \geq \alpha\} \\
&= sup\{x : F(x) < \alpha\} \\
&= Q(\alpha)
\end{aligned}
$$

es decir, el VaR es el umbral mínimo excedido por X *con la probabilidad como máximo* $1-\alpha$.

El VaR tiene las siguientes propiedades:

- $< va < r_{\alpha}[X] \leq \max[X]$ para todo $\alpha \in (0,1)$;
- El VaR es monótono: $VaR_{\alpha}[X] \leq VaR_{\alpha}[Y]$ si $X \leq Y$;
- VaR es invariante en la traslación, $VaR_{\alpha}[X+c] = VaR\alpha[X]+c$;
- El VaR es homogéneo positivo $VaR_{\alpha}[cX] = c \times VaR_{\alpha}[X]$.
- El VaR es comonotónico aditivo (es decir, no hay diversificación para riesgos perfectamente dependientes): si los riesgos $X_1, X_2, ..., X_n$ son comonotónicos, entonces:

$$VaR_{\alpha}[X_1 + X_2 + ... + X_n] = VaR_{\alpha}[X_1] + VaR_{\alpha}[X_2] + ... + VaR_{\alpha}[X_n]$$

Las dos últimas propiedades también se derivan de la siguiente relación general.

Proposición 2.2. (El VaR de una función de v.a.) *El VaR de un v.a.* $Y = g(X)$, *donde* $g(.)$ *es una función no decreciente de un v.a.* X *, se puede calcular de la siguiente manera*:

$$VaR_{\alpha}[X] = g(VaR_{\alpha}[X])$$

A pesar de su simplicidad, la medida de riesgo de referencia, Value-at-Risk (VaR), es duramente criticada. En primer lugar, el VaR no proporciona información sobre la gravedad de las pérdidas más allá del umbral establecido. En segundo lugar, el VaR no satisface la propiedad de subaditividad (por lo tanto, no es consistente) en el sentido de Artzner & al. [1999]. Puede suceder que la diversificación conduzca a un aumento del VaR, en particular en el caso de que los v.a. tengan distribuciones con colas pesadas (medias infinitas). Así, el VaR de una suma de pérdidas no es necesariamente menor o igual a la suma del VaR de pérdidas individuales. El VaR es subaditivo para pérdidas distribuidas elípticamente (ver, por ejemplo, J. McNeil & al. [2005])[1]. Si bien la medida del VaR indica un solo punto en la cola de la distribución, no proporciona ninguna información sobre la magnitud de las pérdidas que pueden ocurrir más allá del VaR.

El VaR puede dar lugar a una mala interpretación de los riesgos: por ejemplo, las carteras con el mismo VaR no están necesariamente sujetas a los mismos riesgos.

Para cubrir estos inconvenientes, se han desarrollado otras medidas de riesgo consistentes.

[1] Se dice que una ley continua es elíptica con un parámetro de posición μ y una matriz simétrica definida positiva Σ si su densidad p se puede escribir $p(x) = (det\,\Sigma)^{-1/2}\, q((x-\mu)^{t}\,\Sigma^{-1}(x-\mu))$, donde q es una función real con valores positivos tales que $\int_{\mathbb{R}^n} q(\|y\|^2)\,dy = 1$. Esto puede verse como la generalización de una ley de Gauss.

2.3 Valor en riesgo de cola (Tail Value-at-Risk)

Además de resaltar la inconsistencia del VaR, Artzner & al. [1999] también propusieron un conjunto de medidas de riesgo coherentes como una medida de riesgo alternativa: la expectativa condicional de cola o el valor en riesgo de cola (denominado TCE o $TVaR$). Esta medida de riesgo es estudiada extensamente por diferentes autores en varios contextos, por lo tanto, a veces se define y se nombra de manera diferente. Wirch y Hardy [1999] definieron la misma medida de riesgo por la expectativa de cola condicional (CTE) y seguiremos su terminología en este libro. Rockafellar y Uryasev [2000] llamaron a su medida de riesgo el valor en riesgo condicional ($CVaR$); Bertsimas y col. [2004] denominó una medida de riesgo similar como déficit medio (Mean Shortfall) y Acerbi & al [2001] estudian una medida de riesgo similar con un nombre aparentemente idéntico (Expected Shortfall). Seguiremos la terminología de Wirch y Hardy [1999] (Expectativa de cola condicional (CTE)) en lo que sigue.

El valor en riesgo de cola ($TVaR$) o el valor en riesgo condicional ($CVaR$) o incluso el Expected Shortfall (ES) en $\alpha\%$ representa las pérdidas promedio esperadas por encima del VaR para un nivel de confianza de $(1-\alpha\%)$. Refleja el promedio ponderado de todos los VaR calculados a niveles de riesgo menores o iguales a α. Mejora el VaR teniendo en cuenta el alcance de las pérdidas. La notoriedad de la que goza esta medida frente al VaR radica en su capacidad para tener en cuenta pérdidas extremas y raras. Esta es una medida consistente en el sentido de Artzner & al. (1999).

2.3.1 Definiciones

La expectativa de cola condicional (CTE) en el nivel de probabilidad α, también llamada expectativa de cola condicional, es una medida de riesgo definida como la expectativa del v.a. X más allá del VaR.

Definición 2.3. (La expectativa de cola condicional-Conditional-Tail-Expectation) *La expectativa de cola condicional de un v.a.* $X \sim F(x)$ *en el nivel de probabilidad* α *, denominado* $CTE_{\alpha}[X]$*, es*:

$$CTE_{\alpha}[X] = \mathbb{E}\left[X \middle| X > VaR_{\alpha}[X]\right] \qquad (7)$$

lo cuál es la expectativa del v.a. X *en los casos en que este v.a. toma valores mayores que VaR, con* $CTE_0[X] = \mathbb{E}\left[X \middle| X > VaR_0[X]\right] = \mathbb{E}[X]$.

Esta medición verifica las propiedades 2 a 7. En el caso continuo, se verifica la propiedad de subaditividad (axioma S) y la medición es consistente. Tenga en cuenta que, en este caso, el CTE luego coincide con el TVaR y podemos evaluar cualquiera de ellos de manera indiferente.

Consideramos que se supera la pérdida por encima del VaR condicional, es decir:

$$X - VaR_{\alpha}[X] \big| X > VaR_{\alpha}[X]$$

Las medias de este exceso condicional, denominado medida de VaR condicional, se denotan por $CVaR_{\alpha}[X]$ y se definen de la siguiente manera:

Definición 2.4. (El valor en riesgo condicional-Conditional Value-at-Risk) *El valor en riesgo condicional de un v.a.* $X \sim F(x)$ *en el nivel de probabilidad* α *, denominado* $CVaR_{\alpha}[X]$ *CV, es*:

$$
\begin{aligned}
CVaR_\alpha[X] &= \mathbb{E}\left[X - VaR_\alpha[X] \middle| X > VaR_\alpha[X]\right] \\
&= CTE_\alpha[X] - VaR_\alpha[X] \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

este es el valor promedio de las pérdidas que exceden el VaR, es decir, es el exceso promedio de pérdida por encima del VaR.

Definición 2.5. (El déficit esperado-Expected shortfall) *El déficit esperado en el nivel* α *, denominado* $ES_\alpha[X]$ *es*:

$$
\begin{aligned}
ES_\alpha[X] &= \mathbb{E}\left[\left(X - VaR_\alpha[X]\right)_+\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X - VaR_\alpha[X] \middle| X > VaR_\alpha[X]\right]\mathbb{P}\left(X > VaR_\alpha[X]\right) \\
&= (1-\alpha)CVaR_\alpha[X] \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Ésta es la prima de stop-loss, cuya retención se fija en $VaR_\alpha[X]$*. Donde* $(x-d)_+ = \max(X-d,0), d>0$.

y tenemos, de las ecuaciones 3.8 y 3.9

$$
\begin{aligned}
CTE_\alpha[X] &= VaR_\alpha[X] + CVaR_\alpha[X] \\
&= VaR_\alpha[X] + \frac{1}{1-\alpha}ES_\alpha[X]
\end{aligned}
$$

lo que une CTE_α con ES_α.

Otra medida de riesgo que se considera cada vez más en la literatura es Tail-Value-at-Risk (TVaR). TVaR se define para un nivel de confianza $\alpha, 0 \le \alpha < 1$, como:

$$
TVaR_\alpha[X] = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_s[X]ds \qquad (10)
$$

esto a veces se denomina valor en riesgo de cola (Tail value-at- risk), denominado por $TVaR_\alpha[X]$ y es la media aritmética de los VaR de X desde s a 1, con $TVaR_0[X] = \int_0^1 VaR_s[X]ds = \mathbb{E}[X]$ También se puede escribir de la siguiente manera:

$$
TVaR_\alpha[X] = \frac{1}{1-\alpha}\left(\mathbb{E}\left(X\mathbf{1}_{\{X>VaR_\alpha[X]\}} + VaR\alpha[X]\left(\mathbb{P}\left(X \le VaR_\alpha[X]\right) - \alpha\right)\right)\right) \quad (11)
$$

Obviamente, tiene en cuenta los valores de la distribución más allá del VaR en el nivel de confianza α y, por tanto, nos informa sobre el grosor de la cola de distribución. Si consideramos un v.a. X continuo, entonces $\mathbb{P}\left(X \le VaR_\alpha[X]\right) = \alpha$. La ecuación (11) se convierte así en $TVaR_\alpha[X] = \mathbb{E}\left[X \middle| X > VaR_\alpha[X]\right]$ que es exactamente la definición de CTE_α, por lo que CTE se puede escribir de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
CTE_{\alpha}[X] &= \mathbb{E}\left[X \middle| X > VaR_{\alpha}[X]\right] \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} VaR_{s}[X]\,ds \qquad (12)
\end{aligned}
$$

2.3.2 Propiedades

Si bien $TVaR$ será consistente para los v.a. continuos y no continuos, en este mismo contexto de no continuidad, CTE no respeta todas las propiedades de una medida de riesgo consistente. Cuando X es continuo, CTE satisface los axiomas M, T, PH y S, y, por lo tanto, es consistente. El CTE también satisface todas las propiedades deseables indicadas anteriormente.

3 Principios del cálculo de la prima

Una prima de seguro es la cantidad que el asegurado debe pagar para calificar para la cobertura del seguro en caso de una pérdida. El monto de esta prima depende de muchos factores. En esta parte, discutimos algunas propiedades esenciales que deberían ser satisfechas por un principio de cálculo de primas, para ser un principio ideal. A continuación, definimos algunos principios de cálculo de primas populares existentes.

Denotamos por $\Pi(X)$ la prima que cobra la aseguradora para cubrir el riesgo X. Cualquier regla que permita asociar un riesgo X, a una prima $\Pi(X)$ se denomina principio de prima. Las siguientes propiedades son propiedades deseables para un principio de prima y la siguiente lista presenta las propiedades más importantes en la práctica.

1. Sin sobrecarga. Para una medida de riesgo dada X, si $X \leq x_{\max}$, entonces $\Pi[X] \leq X_{\max}$
   Esta propiedad especifica que la prima no excede el monto máximo. De lo contrario, no habría razón para que el asegurado comprara una cobertura de seguro.
2. Carga de seguridad: $\Pi(X) \geq \mathbb{E}(X)$

   Esta propiedad requiere que la prima sea mayor o igual a la prima pura. Esta propiedad permite que el asegurador pueda resistir la volatilidad natural de los siniestros. Por lo tanto, el capital requerido debe superar las pérdidas esperadas (bajo riesgo de ruina para una compañía de seguros, por ejemplo). Esto significa que la medida de un riesgo debe ser mayor que su expectativa.

3. Carga injustificada. Sea a una constante. Siempre debemos tener $\Pi[a] = a$.

   Lo que significa que la medida de una cierta cantidad es esa misma cantidad.

4. Aditividad: $\Pi(X+Y) = \Pi(X) + \Pi(Y)$ Esta propiedad asegura que no haya diferencia entre asegurar todos los riesgos o repartir la cobertura en varios contratos.
5. Homogeneidad positiva: para cualquier constante $a \geq 0, \Pi(aX) = a\Pi(X)$

   Si el monto de los siniestros sufre un cambio de escala, debido a la inflación, por ejemplo, esta propiedad especifica que la prima por el nuevo riesgo aX es proporcional a la prima por el riesgo base $\Pi(X)$. Esta propiedad garantiza al asegurador el mismo nivel de rentabilidad en caso de este cambio de escala.

6. Invarianza de traslación: para cualquier constante $a \geq 0, \Pi(X+a) = \Pi(X) + a$

   Esta propiedad garantiza que el principio de prima da un resultado lógico ante los nuevos costos fijados por contrato.

7. Subaditividad. Sean X, Y dos riesgos. Debemos tener $\Pi(X+Y) \leq \Pi(X) + \Pi(Y)$,

   Este principio evita que un individuo o una compañía de seguros divida un riesgo a la mitad y lo aproveche. Además, la puesta en común de los costos de varios contratos debería conducir a una reducción de las primas cobradas por el conjunto de contratos.

Los principios de la prima son las medidas de riesgo más importantes en la ciencia actuarial. Las propiedades que tiene un principio primordial son determinantes a la hora de elegirlo. Ahora damos los principios de prima. Para más detalles, nos referimos a Young [2004]:

A - Principio de la prima neta. Este principio es el más simple de los principios de prima y es igual al valor esperado de las pérdidas:

$$\Pi(X) = \mathbb{E}(X)$$

Este principio no incluye ninguna carga de seguridad y, por tanto, no puede utilizarse para establecer la prima final. Este principio sigue siendo interesante para dar una idea de la prima por su sencillez. Además, respeta todas las demás propiedades.

B - Principio de valor esperado. El principio del valor esperado viene dado por:

$$\Pi(X) = (1+\theta)\mathbb{E}(X), \quad \theta > 0$$

donde θ y $\theta\mathbb{E}(X)$ son las cargas de seguridad relativas al total, respectivamente. Aquí solo necesitamos un parámetro de la distribución del riesgo, a saber, el promedio. Este principio contiene una carga de seguridad positiva, es aditivo y proporcional. Sin embargo, no es uniforme ni está limitado. Una desventaja de este principio es que todos los riesgos con los mismos medios tienen la misma prima. Intuitivamente, un riesgo con una dispersión grande es más peligroso que un riesgo con el mismo promedio y una distorsión pequeña y, por lo tanto, debería tener una prima más alta. Por tanto, parece que debería incluirse alguna medida de dispersión en la fórmula de la prima. Esta idea se tiene en cuenta mediante los dos principios siguientes.

C - Principio de varianza. El principio de varianza viene dado por:

$$\Pi(X) = \mathbb{E}(X) + \theta Var(X), \quad \theta > 0$$

Este principio modifica el principio del valor esperado al hacer que el aumento dependa de la varianza del riesgo. Esta modificación permite otorgar una prima diferente a los riesgos que no tienen la misma varianza.

Este principio también tiene la ventaja de ser coherente. Sin embargo, no es proporcional, tampoco tiene tope, porque para un cierto valor de θ es posible tener $\Pi(X) > X_m$.

D - Principio de desviación estándar. El principio de la desviación estándar viene dado por:

$$\Pi(X) = \mathbb{E}(X) + \theta\sqrt{Var(X)}, \quad \theta > 0$$

Este principio se inspira en el principio del valor esperado y el principio de varianza. Esto le permite beneficiarse de las ventajas de todos.

Este principio es proporcional, sin embargo, no es aditivo, porque las desviaciones estándar no suman, no tiene tope.

E - Principio de utilidad equivalente:

$$u(w) = \mathbb{E}\Big(u\big(w - X + \Pi(X)\big)\Big)$$

Sea u la función de utilidad del asegurador y w su excedente inicial. Este principio establece la prima como el monto mínimo que debe cobrar el asegurador, de acuerdo con su aversión al riesgo, para brindar cobertura.

Este principio contiene una carga de seguridad positiva ya que, con la desigualdad de Jensen:

$$u(w) = \mathbb{E}\Big(u\big(w - X + \Pi(X)\big)\Big) \leq u\big(w - X + \Pi(X)\big)$$

El principio es coherente y limitado, sin embargo, no es aditivo ni proporcional.

F - Principio exponencial:

$$\Pi(X) = \frac{1}{\beta} \ln \mathbb{E}\big(\exp(\beta X)\big), \quad \beta > 0$$

Este principio se deriva del principio de utilidad equivalente cuando la función de utilidad u es exponencial, es decir, $u = -\exp(-\beta x), \beta > 0$. Este principio tiene la propiedad de no depender del excedente inicial. También es proporcional, sin embargo, como el principio de utilidad equivalente, no es aditivo.

G - Principio de Esscher:

$$\Pi(X) = \mathbb{E}\left(Xe^{hX}\right) / \mathbb{E}\left(e^{hX}\right)$$

Este principio se deriva del principio de utilidad exponencial. Ocurre cuando el asegurador pretende optimizar su utilidad según el principio de utilidad equivalente:

$$\max_{\Pi} u(w) - h\mathbb{E}\Big(u\big(w - X + \Pi(X)\big)\Big), h > 0$$

Este principio también puede verse como una ponderación del riesgo cuando se da más peso a los eventos extremos. Tiene la ventaja de ser aditivo. Sin embargo, no es proporcional.

H - Principio de distorsión.

$$\Pi(X) = \int_0^{\infty} \psi\big(S(t)\big)\,dt$$

donde $S = 1 - F$ es la función de supervivencia del riesgo X y ψ es una función de distorsión.

Este principio es similar al principio de Esscher en el sentido de que también produce una ponderación del riesgo cuando se da más peso a los eventos extremos. A diferencia del principio de Esscher, es proporcional, pero no aditivo, este principio verifica todas las demás propiedades. Este principio se presenta en la siguiente sección.

Los principios de prima también se analizan en Rolski & al. [1999] y Kaas & al. [2008].

4 Medición del riesgo de distorsión

El riesgo de reaseguro es de cola pesada y contiene riesgo sistemático. Las primas basadas en el valor actuarial o más generalmente en momentos bajo una medida de probabilidad no reflejan suficientemente la cola de este riesgo.

Los principios de prima presentados en la subsección 3.3 definen el riesgo con base en una expectativa de cargo por pérdidas. La expectativa $\mathbb{E}(X)$ de una pérdida aleatoria continua no negativa X de fdr F y la función de supervivencia $S(x)=P(X>x)=1-F(x)=\overline{F}(x)$, puede escribirse como:

$$\mathbb{E}(X)=\int_0^\infty S(x)dx \qquad (13)$$

Entonces, en lugar de agregar una carga a $\mathbb{E}(X)$ para obtener una prima, podemos redefinir la distribución de pérdidas cambiando más probabilidad de ponderación a pérdidas altas. Una forma de lograr esto es aplicar una distorsión a la función de supervivencia. Este procedimiento es introducido por Wang [1995, 1996] y está estrechamente relacionado con la teoría de la expectativa distorsionada, Yaari [1987]. Estos principios de prima se estudian como medidas de riesgo en Wang [2000, 2001] y se conocen por medidas de riesgo de distorsión desde entonces. Tail Value at Risk (TVaR) así como Value at Risk (VaR) y PH-transform son casos especiales de medidas de riesgo de distorsión (o principios de primas de distorsión). Antes de definir la medida del riesgo de distorsión (o principios de la prima de distorsión), primero debemos introducir algunas definiciones útiles.

Definición 4.1. (función de distorsión) *Una función* $\psi:[0,1]\rightarrow[0,1]$ *es una función de distorsión si:*

1. $\psi(0)=0$ *y* $\psi(1)=1$.
2. $\psi(.)$ *es no decreciente y continua*.

Definición 4.2. (probabilidad distorsionada) Sea $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espacio de probabilidad y $\psi:[0,1]\rightarrow[0,1]$ una función de distorsión. Sea la función de conjunto $\psi\circ P$ la función establecida definida por $\psi\circ P(A):=\psi(P(A)),\forall A\in\mathcal{F}$,. La función $\psi\circ P$ se llama probabilidad distorsionada.

Presentamos ahora el concepto de medidas de riesgo de distorsión (o principios de primas de distorsión). Sea X un modelo de v.a. no negativo igual a un riesgo (o pérdida) de fdr F y función de supervivencia $S(x)=P(X>x)=1-F(x)=\overline{F}(x)$, la media de pérdida o la prima neta es:

$$\mathbb{E}(X)=\int_0^\infty S(x)dx$$

La contribución de Wang es sugerir una medida de riesgo basada en una función de distorsión $\psi\left(S(x)\right)$. La medida del riesgo de distorsión (o principios de las primas de distorsión) asociada con la función de distorsión ψ denotada por $\Pi_{\psi}[.]$ se define por:

$$\Pi_{\psi}[X]=\int_0^{\infty}\psi\left(S(x)\right)dx \tag{14}$$

por cualquier pérdida v.a. X.

La idea principal de las medidas de riesgo de distorsión (o principios de prima de distorsión) es cuantificar el riesgo o derivar la prima de riesgo de distorsión, que contiene una carga de seguridad de distorsión.

Así, al cambiar las probabilidades originales de manera que las probabilidades de eventos adversos se inflen artificialmente (distorsiona la distribución de probabilidad del riesgo, asignando una mayor probabilidad a los eventos adversos). Específicamente, se involucra una carga de riesgo utilizando una medida de probabilidad distorsionada Q en lugar de la medida objetiva P para calcular una pérdida esperada inflada como una prima de riesgo bruta tal que:

$$\mathbb{E}(X)=\int_0^{\infty}S(x)dx\le\int_0^{\infty}\psi\left(S(x)\right)dx=\Pi_{\psi}(X)$$

Por lo tanto, la medida del riesgo de distorsión puede interpretarse como un ajuste de la verdadera medida de probabilidad para dar más peso a los eventos de mayor riesgo. La expresión 14 también se denomina **medida de riesgo ajustada** o **medida de riesgo de Wang**. Esta expresión se puede escribir en formas alternativas:

$$\begin{aligned}\Pi_{\psi}[X]&=\int_0^{\infty}\psi\left(S(x)\right)dx\\&=\int_0^{\infty}x\psi'\left(S(x)\right)f(x)dx &(15)\\&=\int_0^{1}\psi'(1-s)Q(s)ds &(16)\\&=\int_0^{1}VaR_{1-s}[x]d\psi(s) &(17)\end{aligned}$$

De (15), podemos considerar también $\psi'\left(S(x)\right)$ como un mecanismo pesado que descuenta la probabilidad de eventos deseables (para X alto), mientras carga la probabilidad de eventos adversos (para X bajo). La representación (16) es más conveniente para desarrollar estimadores empíricos de la medida de riesgo Π. La representación (17) indica que las medidas de riesgo de distorsión son promedios ponderados de los VaR.

En el caso de que v.a. $X\in\mathbb{R}$, la medida del riesgo de distorsión se define de la siguiente manera:

$$\Pi_{\psi}[X]=-\int_{-\infty}^{0}\left[1-\psi\left(S(x)\right)\right]dx+\int_0^{\infty}\psi\left(S(x)\right)dx \tag{18}$$

Tenga en cuenta que la segunda integral en la expresión 18 es igual a la de la expresión 14. Una interpretación simple de una medida del riesgo de distorsión es la siguiente: primero, la función de supervivencia de la variable aleatoria está distorsionada $\left(\psi(S)\right)$; en segundo lugar, se calcula la expectativa matemática de la variable aleatoria distorsionada.

Observación 4.3.

- Tenga en cuenta que la expectativa matemática $\mathbb{E}[X]$ es una medida del riesgo de distorsión cuya función de distorsión es la función de identidad $\psi(s) = id(s) = s$.
- Tenga en cuenta además que $\psi_1(s) \leq \psi_2(s)$ para todo $s \in [0,1]$ implica que $\rho_{\psi_1}[X] \leq \rho_{\psi_2}[X]$.
- Vemos inmediatamente que $\psi(S(x))$ es una función no creciente de x con valores en el intervalo $[0,1]$. Por tanto, la función de distorsión $\psi(S(x))$ se puede considerar como una fdr ajustada al riesgo. Sin embargo, $\Pi_\psi[X]$ no siempre puede considerarse como la expectativa de X bajo una nueva medida de probabilidad, porque $\psi(S(x))$ no necesariamente será continua a la derecha.
- Para una función de distorsión general ψ , la medida de riesgo $\Pi_\psi[X]$ puede interpretarse como una integral de Choquet (ver Denneberg [1994]). La representación de las medidas de riesgo de distorsión como una integral de Choquet se utiliza para explorar sus propiedades matemáticas, el cálculo de las medidas de riesgo de distorsión se puede realizar fácilmente tomando la expectativa de X bajo la medida de probabilidad distorsionada $Q(A) = \psi(P(A))$.

Las propiedades y varios ejemplos de funciones de distorsión viables $\psi(.)$ se proporcionan en las discusiones de Wirch y Hardy [2001].

4.1 Propiedades de las medidas de riesgo de distorsión

Las medidas de riesgo de Wang tienen muchas propiedades convenientes. En esta subsección proporcionamos una lista de varias propiedades de las medidas de riesgo de distorsión.

Proposición 4.4. (Propiedades de las medidas de riesgo de distorsión). Sea ψ una función de distorsión y, una medida de riesgo de distorsión Π_ψ tiene las siguientes propiedades:

a. Homogeneidad positiva,
b. Invariante por traducción,
c. Monotonicidad,

   Si además ψ es función de la distorsión cóncava:

d. Wirch y Hardy [1999] han demostrado que una medida de riesgo de distorsión es subaditiva, por lo tanto, consistente en el sentido de Artzner & al. [1999] si y solo si su función de distorsión ψ es cóncava, es decir, las funciones de distorsión cóncavas generan las medidas de riesgo coherentes.
   La concavidad de la función de distorsión es una condición necesaria y suficiente para que la medición del riesgo sea consistente.
e. Las medidas de riesgo de Wang Π_ψ son co monotónicamente sub aditivas.

Corolario 4.5. (Consistencia). Una medida del riesgo de distorsión es consistente si y solo si la función de distorsión ψ es cóncava.

Al elegir una función de distorsión adecuada ψ , agrupamos en 4.2 a continuación, algunas medidas de riesgo de distorsión muy frecuentes en la literatura actuarial.

4.2 Ejemplos de medidas de riesgo de distorsión

Para las opciones adecuadas de $\psi(.)$, Las medidas de riesgo conocidas, como VaR y ES, son medidas de riesgo de distorsión. En particular, para un nivel de confianza $\alpha \in (0,1)$:

- VaR corresponde a:

$$\psi VaR(x,\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 1-\alpha \\ 0, & \text{si no,} \end{cases}$$

  Lo que no es una función cóncava, el valor en riesgo no es consistente (porque no es subaditivo);

- ES corresponde a:

$$\psi TVaR(x,\alpha) = \min\left(1, \frac{x}{1-\alpha}\right) \qquad (19)$$

  esta es una función de distorsión cóncava, por lo que TVaR es una medida de riesgo constante. La conexión entre TVaR y la función de distorsión (19) se ha observado en Wirch y Hardy [1999].

  Asimismo, es posible representar muchas medidas de riesgo en forma de medida de Wang.

- Medición de riesgo PHP. La medición de riesgo de PHP fue introducida por Wang [1995]. La función de distorsión para PHP viene dada por:

$$\psi PHP(t,\xi) = t^{\frac{1}{\xi}}, \quad \forall \xi \geq 1$$

  la medida del riesgo de distorsión se define por:

$$\Pi_{PHP}[t] = \int_0^{\infty} (1-F(t))^{\frac{1}{\xi}} dt$$

  El parámetro $\xi \geq 1$ representa el coeficiente de distorsión o índice de aversión al riesgo. Y para $\xi = 1$, $\Pi[X] = \mathbb{E}[X]$. Está claro que ψ_{PHP} es cóncavo para $\xi \geq 1$ y, en consecuencia, la medición de PHP es consistente.

  Para un nivel de retención $R > 0$, el PHP o la prima de reaseguro se define de la siguiente manera:

$$\Pi_{\xi,R}[X] = \int_R^{\infty} \left(\overline{F}(x)\right)^{\frac{1}{\xi}} dx$$

- Medición de riesgo de potencia dual (Dual-power). La medición del riesgo de potencia dual se obtiene considerando la función de distorsión:

$$\psi_{DP}(t,\xi) = 1-(1-t)^{\xi}, \quad \forall \xi \geq 1$$

La medida de Wang se define por:

$$\Pi[t] = \int_0^{\infty} \left(1-(F(t))^{\xi}\right) dt$$

- Medida de riesgo de la Transformada de Wang (WT-Wang Transform). La medida de riesgo de la Transformada de Wang fue presentada por Wang [2000], cuya función de distorsión viene dada por:

$$\forall t \in [0,1]: \ \psi_{WT}(t,\beta) = \left(\Phi^{-1}(t) + \Phi^{-1}(\beta)\right), \quad \beta \in [0,1]$$

  que se llama la "transformada de Wang a nivel β", la medida de riesgo correspondiente de distorsión que se llama "la medida de riesgo de la transformada de Wang y se denota por $WT_p[X]$. Con Φ que es la fdr de la distribución normal centrada reducida $\mathcal{N}(0,1)$.

$$\Pi(t) = \int_0^{\infty} \left(\Phi^{-1}\left(\left(1-F(t)\right)\right) + \Phi^{-1}(\beta)\right) dt$$

- Hürlimann [48] presentó la medida de riesgo de transformación de LB (distorsión retrospectiva LB - Lookback (LB) distortion) para estudiar estrategias de opciones y modelar el riesgo comercial. La función de distorsión para la transformada LB está dada por:

$$\psi_{LB}(t,\xi) = t^{\xi}(1-\xi \ln t), \quad \xi \in (0,1]$$

  ψ_{LB} es una función cóncava para $\xi \in (0,1]$, por lo tanto LB_{ξ} es consistente.

- La medida de riesgo de distorsión Beta (Beta distortion), cuya función de distorsión viene dada por la función beta:

$$\psi(x) = \frac{1}{\beta(a,b)} \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt, \quad a > 0, \beta(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt$$

  Sea $b=1$ lo que da “power distortion” $\psi(x) = x^a$. Sea $a=1$ lo que da una distorsión de potencia dual (dual-power distortion) $\psi(x) = 1-(1-x)^b$.

Para obtener más detalles sobre las medidas de riesgo de distorsión, consulte Denuit & al. [2005, secciones 2.6.2 y 2.6.3].

Tabla 1: Resumen de las medidas de riesgo de distorsión

Medición de riesgo	Función de distorsión	Restricciones sobre medidas de riesgo coherentes
Distorsión beta-Beta-distortion	$\psi(t)=\int_0^t \frac{1}{\beta(a,b)} s^{a-1}(1-s)^{b-1}\,ds$	$\beta(a,b)=\int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{b-1}\,ds$ $a\le 1, b\ge 1$
Transformación de probabilidad proporcional -Proportional hazard transform	$\psi(t)=t^a$	$a\le 1$
Función de potencia dual-Dual power function	$\psi(t)=1-(1-t)^a$	$a\ge 1$
Principio de Gini-Gini principle	$\psi(t)=(1+a)t-at^2$	$0\le a\le 1$
Transformada de Wang-Wang transform	$\psi(t)=\left(\Phi^{-1}(t)+\Phi^{-1}(p)\right)$	
Lookback	$\psi(t)=t^a(1-a\ln t)$	$0<a<1$
Expectativa de cola condicional-Conditional Tail Expectation	$\psi(x)=\min\left(1,\frac{x}{1-\alpha}\right)$	
Valor en Riesgo-Value at risk	$\psi(x)=\begin{cases}1, & \text{si } x>1-\alpha\\ 0, & \text{si no,}\end{cases}$	

5 Estimación de las medidas de riesgo de distorsión

El objetivo de esta parte es proporcionar diferentes enfoques de estimación para las primas de riesgo de una gran distorsión de pérdidas de cola. Se discuten respectivamente los enfoques por cuantiles empíricos y por cuantiles extremos (enfoque semi-paramétrico). La atención principal se centra en los estimadores semi-paramétricos. En particular, damos las definiciones de los estimadores, ejemplos, así como la normalidad asintótica.

En el método de cuantiles empíricos, estimamos la función de distribución de pérdidas mediante la función de distribución empírica. Jones y Zitikis [2003] ofrecen una discusión sobre este tema.

Consideremos ahora un conjunto de observaciones independientes e idénticamente distribuidas (iid) $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de un v.a X (el riesgo) con fdr F y función cuantil $Q=F^{-1}$ y sean $X_{(1:n)}\le X_{(2:n)}\le ...\le X_{(n:n)}$ las estadísticas de orden correspondientes. La función cuantil Q se puede estimar mediante el cuantil empírico (muestra) Q_n definido por:

$$Q_n(s)=\inf\{t>0, F_n(t)\ge s\}, \quad s\in[0,1]$$

donde $F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{X_i\le x}$ es la distribución empírica de la muestra y $\mathbf{1}_A$ es la función indicadora del conjunto A.

Se obtiene un estimador natural para $\Pi_\psi[X]$ mediante el enfoque empírico reemplazando el cuantil verdadero Q por la función cuantil empírica Q_n:

$$\Pi_{\psi,n}(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(\psi\left(\frac{i}{n}\right)-\psi\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)X_{n-i+1:n} \qquad (20)$$

El estimador $\Pi_{\psi,n}(\ )$ puede verse como un $L-estadístico$ que es una combinación lineal de estadísticos de orden (ver, por ejemplo, Shorack y Wellner [1986]. Para una aplicación reciente de tal clase de estadísticas en la estimación de medidas de riesgo, nos referimos a Jones y Zitikis [2003, 2005, 2007].

Para algunas inferencias estadísticas sobre las primas de riesgo de distorsión, podemos consultar Peng [2012] Jones y Zitikis [2003], Necir y Boukhetala [2004], Centeno de Lourdes y Andrade e Silva [2005], Necir & al. [2007], Jones y Zitikis [2007], Brazauskas & al. [2008], Furman y Zitikis [2008a-2008b], Greselin & al. [2009], Necir y Meraghni [2009,2010], Brahimi & al. [2012,2011], Peng & al. [2012], Rassoul [2012], Deme & al. [2013].

Utilizando la relación entre las medidas de riesgo de distorsión y los estadísticos-L, Jones y Zitikis (ver Jones y Zitikis [2003, Teorema 3.2]) establecieron la normalidad asintótica del estimador de $\Pi_{psi}(X)$. De hecho, utilizaron la teoría asintótica para estadísticos-L (por ejemplo, Shorack y Wellner [1986]) muestran que, para fdr F con un número suficiente de momentos finitos y bajo ciertas condiciones de regularidad en la función de distorsión ψ, se da el siguiente resultado de normalidad asintótica:

$$\sqrt{n}\left(\Pi_{\psi,n}(X)-\Pi_{\psi}(X)\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\sigma_{\psi}^{2}\right) \text{ cuando } n\to\infty$$

a condición que la varianza:

$$\sigma^2_{\Pi_{\psi,n}}=\int_0^1\int_0^1\left(\min(s,t)-st\right)\psi'(s)\psi'(t)\,dQ(1-s)\,dQ(1-t) \quad (3.21)$$

es decir, para las medidas de riesgo definidas en (3.14), Jones y Zitikis [2003] proporcionan las condiciones bajo las cuales $\left(\Pi_{\psi,n}(X)-\Pi_{\psi}(X)\right)$ es asintóticamente normal con media cero y varianza finita, donde F_n es el estimador empírico de F. La consistencia de los estimadores se sigue inmediatamente de su normalidad asintótica en las condiciones correspondientes.

Ejemplos

A continuación, presentamos algunas medidas del riesgo de distorsión y sus expresiones en términos de la función cuantil. Aplicando el mismo principio en (20), derivamos estimadores funcionales no paramétricos de medidas de riesgo de distorsión y derivamos la forma exacta de la varianza asintótica para las funciones de distorsión específicas asociadas. Consideramos a continuación los ejemplos de VaR, CTE o TVaR, PHT.

VaR

Si $g(x)=\mathbf{1}_{x>\alpha}$ para $p\in[0,1]$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
VaR_\alpha\left[X\right] &= \int_0^\infty \mathbf{1}_{\left\{1-F(x)>1-\alpha\right\}} dx \qquad (22)\\
&= \int_0^\infty \mathbf{1}_{\left\{x>F^{-1}(\alpha)\right\}} dx\\
&= \int_0^{F^{-1}(\alpha)} 1dx + \int_{F^{-1}(\alpha)}^\infty 0dx\\
&= F^{-1}(\alpha) = Q(\alpha)
\end{aligned}
$$

que es el cuantil empírico $Q(\alpha)$, por lo tanto, el estimador no paramétrico de VaR_α se puede escribir de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
VaR_\alpha\left[X\right] &= \sum_{i=1}^{n} X_{i:n}\left[\mathbf{1}_{\left\{\frac{i-1}{n}\le 1-\alpha\right\}} - \mathbf{1}_{\left\{\frac{i}{n}\le 1-\alpha\right\}}\right] \qquad (23)\\
&= \begin{cases} X_{n(1-\alpha)}, & \text{si } n(1-\alpha) \text{ es un entero}\\ X_{\left[n(1-\alpha)\right]+1}, & \text{si no}\end{cases}
\end{aligned}
$$

donde $\left[y\right]$ denota la parte entera de y. La varianza asintótica del estimador de VaR es:

$$
\sigma^2 = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\left[f\left(Q(\alpha)\right)\right]^2}
$$

Observación 5.1. Podemos reemplazar $\left[n\alpha\right]$ por $\left[n\alpha\right]+1$ o en general por cualquier otra secuencia k_n siempre que $k_n / n \to \alpha$. En este caso, el estimador vendrá dado por $X_{(k_n:n)}$.

CTE

$$
\Pi_{CTE,\alpha}\left[X\right] = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 Q(s)ds \qquad (24)
$$

Reemplazando Q por su versión empírica Q_n definida por $Q_n(s) = X_{i,n}$, para todo $(i-1)/n < s \le i/n$ y $i = 1,...,n$ con $Q_n(0) = X_{1:n}$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\Pi_{CTE,n,\alpha}\left[X\right] &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 Q_n(s)ds \qquad (25)\\
&= \frac{1}{1-\alpha}\sum_{i=\left[n\alpha\right]+1}^{n}\int_{\frac{1}{1-\alpha}}^{\frac{i}{n}} dsX_{i:n}\\
&= \frac{1}{n(1-\alpha)}\sum_{i=\left[n\alpha\right]+1}^{n} X_{i:n}
\end{aligned}
$$

El comportamiento asintótico del estimador $\Pi_{CTE,n,\alpha}[X]$ ha sido estudiado por Brazauskas & al. [2008, Teorema 3.1], cuando $\mathbb{E}\left[X^2\right]<\infty$. Este teorema puede considerarse como un corolario del teorema 3.2 en Jones y Zitikis [2003]. De hecho, la varianza asintótica se obtiene sustituyendo la función de distorsión en la expresión (3.21). Entonces, la varianza asintótica es:

$$\sigma^2_{\Pi_{CTE,n,\alpha}}=\frac{1}{(1-\alpha)^2}\int_\alpha^1\int_\alpha^1\left(\min(s,t)-st\right)dQ(s)\,dQ(t)$$

PHT

Reemplazando Q por su versión empírica Q_n definida por $Q_n(s)=X_{i,n}$, n para todo $(i-1)/n<s\leq i/n$ y $i=1,\dots,n$ con $Q_n(0)=X_{1:n}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\Pi_{PHT,n,\xi}[X]&=\int_0^1\frac{1}{\xi}s^{\frac{1}{\xi}-1}Q_n(s)\,ds \qquad 26\\&=\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\frac{1}{\xi}s^{\frac{1}{\xi}-1}ds X_{i:n}\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{i}{n}\right)^{\frac{1}{\xi}}-\left(\frac{i-1}{n}\right)^{\frac{1}{\xi}}\right)X_{n-i+1:n}\end{aligned}$$

La varianza asintótica se obtiene sustituyendo la función de distorsión en la expresión (3.21). Por tanto, la varianza asintótica es:

$$\sigma^2_{\Pi_{PHT,n,\xi}}=\frac{1}{\xi^2}\int_0^1\int_0^1\left(\min(s,t)-st\right)s^{\frac{1}{\xi}-1}t^{\frac{1}{\xi}-1}dQ(s)\,dQ(t)$$

siempre que $\mathbb{E}|X|^\eta<\infty$ para algunos $\eta>\dfrac{2\xi}{2-\xi}$.

El caso $\xi\geq 1/2$ no está cubierto en la fórmula anterior. Jones y Zitikis [2003] señalan que, en el caso de PHT, estas condiciones se satisfacen **si y solo si** $\xi<1/2$ y es consistente para todo $\xi\geq 1$ siempre que $\mathbb{E}|X|^\eta<\infty$ para $\eta>\xi$ y es asintóticamente normal si $\xi\in[1,2]$ con la misma condición en el momento X pero esta vez limitado a $\eta>\dfrac{2\xi}{2-\xi}$.

El uso de cuantiles empíricos para estimar las primas de riesgo de distorsión Π_ψ no garantiza la normalidad asintótica cuando las pérdidas tienen una distribución de cola pesada. en este caso, los resultados de Jones y Zitikis [2003] ya no se pueden aplicar, ya que el momento de segundo orden de X es infinito.

Por tanto, Jones y Zitikis [2003] concluyen que esta sigue siendo una cuestión abierta para este caso. Por lo tanto, se requiere una respuesta o un nuevo enfoque para manejar esta situación. Utilizando un enfoque basado en cuantiles extremos, Necir y Meraghni [2009] dieron una estimación alternativa de la prima de riesgo de distorsión en el caso de pérdidas extremas (distribuciones de cola pesada) y estudiaron su normalidad asintótica.

Entonces, en este contexto, es bastante natural asumir que las funciones de distorsión ψ son tales que $t \mapsto \psi(1/t)$ varía regularmente ad infinitum con un índice de variación regular $\beta \geq 1$, es decir:

$$\psi(1/t) = t^{1/\beta} \ell_{\psi}(t) \qquad (27)$$

donde $\psi(t)$ varía lentamente hasta el infinito, es decir, $\ell_{\psi}(tx)/\ell_{\psi}(t) \to 1$ cuando $t \to \infty$, para todo $x > 0$.

Definición del estimador de Necir y Meraghni (2009)

La idea principal es la siguiente. La fórmula (16) se puede dividir de la siguiente manera:

$$\Pi_{\psi}[X] = \int_0^{k/n} Q(1-s)\,d\psi(s) + \int_{k/n}^1 Q(1-s)\,d\psi(s) \qquad (28)$$

En la fórmula (28), reemplazando $Q(1-s)$ por el estimador de cuantiles extremos $Q_n^W(1-s)$ (estimador de Weissman [1978]) en la primera integral y por el cuantil empírico en la segunda integral, Necir y Meraghni [2009] propusieron un estimador alternativo para $\Pi_{\psi}(X)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Pi\psi[X] &= \int_0^{k/n} \psi(s)\,dQ_n^W(1-s) - \int_{k/n}^1 \psi(s)\,dQ_n(1-s) \\ &= \psi(k/n)\frac{X_{n-k,n}}{1-\gamma\rho} + \sum_{i=k+1}^{n} c_{i,n}(\psi) X_{n-i+1:n} \qquad (29) \end{aligned}$$

donde $c_{i,n}(\psi) = \left(\psi(i/n) - \psi((i-1)/n)\right)$ y, $\rho\gamma^{H} \in]0,1[$.

La estimación de $\Pi_{\psi}[X]$ también ha sido estudiada por Centeno y Andrade e Silva [2005] utilizando técnicas de bootstrap. En el caso de estratificación de exceso de pérdida alta $R \to \infty$, la técnica de estimación de $\Pi_{\xi,R}(X)$ es diferente del caso donde $R = 0$. Este caso es tratado por diferentes autores, por ejemplo, Necir y Boukhetala [2004], Vandewalle y Beirlant [2007] y Necir & al. [2007] han introducido y estudiado diferentes estimadores de $\Pi_{\xi,R}$ basados en montos de muestra de siniestros sobre cobertura de reaseguro por pérdidas importantes.

Reemplazando Q por su versión empírica Q_n definida por $Q_n(s) = X_{i,n}$ para todo $(i-1)/n < s \leq i/n$ y $i = 1,\ldots,n$ con $Q_n(0) = X_{1:n}$, Necir y col. [2007] propusieron un estimador semi-paramétrico de $\Pi_{\xi,R_{opt}}(X)$ para un valor fijado $\xi \geq 1$ y un umbral de retención óptimo

$R_{opt} = F^{\leftarrow}(1-k/n)$ donde $k = k_n$ es una secuencia intermedia teniendo como estimador de R_{opt} el valor $R_{opt} = X_{n-k:n}$:

$$\Pi_{\xi,R_{opt}}(X) = \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{\xi}} \frac{\xi}{1/\gamma_{k,n}^{(H)} - \xi} X_{n-k:n} \quad \text{para } \gamma_{k,n}^{(H)} < 1/\xi$$

Deme y Lo [2013] agrupan los estimadores de primas de riesgo de distorsión Π_ψ en una forma general de la siguiente manera:

$$\Pi_n^*(\psi) = \Pi_n(\psi)\mathbf{1}_{\{\sigma_\psi^2 = \infty\}} + \Pi_n(\psi)\mathbf{1}_{\{\sigma_\psi^2 < \infty\}} \qquad (30)$$

donde $\Pi_n(\psi)$ es como en (3). Mas precisamente:

$$\Pi_n^*(\psi) = \Pi_n(\psi)\mathbf{1}_{\{S(\gamma,\beta)\}} + \Pi_n(\psi)\mathbf{1}_{\{\overline{S}(\gamma,\beta)\}} \qquad (31)$$

donde $S(\gamma,\beta) = \left\{(\gamma,\beta) \in (0,\infty)\times[1,\infty), \gamma \in (1/2,1) \text{ y } \beta < \frac{1}{\gamma}\right\}$ y $\overline{S}(\gamma,\beta)$ es su complementario en $(o,\infty)\times[1,\infty)$.

Se han investigado en la literatura varios casos especiales que están cubiertos por la teoría de la estadística inferencial para las primas de riesgo de distorsión en el caso de distribuciones de colas pesadas utilizando la teoría del valor extremo. Se puede hacer referencia a Peng [2001], Necir y Boukhetala [2004], Necir & al. [2007], Necir y Meraghni [2009], Necir & al. [2010], Brahimi y col. [2012,2011], Necir y Zitikis (2012), Peng & al. [2012], Rassoul [2012] y Deme & al. [2013].

Para hacer una buena inferencia, como encontrar $\mathcal{CI}$ para $\Pi_\psi(.)$, Por ejemplo, necesitamos suponer alguna caracterización de la distribución de estos estimadores. Sin embargo, la existencia de una distribución asintótica no degenerada requiere que la pérdida fdr F satisfaga la condición de segundo orden discutida.

Teorema 5.2. *Suponga que F satisface (10) con $\gamma \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ y su correspondiente cuantil. La función $Q(.)$ es continuamente diferenciable sobre $[0,1]$. Para cualquier función de distorsión diferenciable ψ que satisfaga la condición (27) con $\beta \in \left[1,\frac{1}{\gamma}\right)$, y para cualquier secuencia intermedia $k = k_n$ que satisfaga y $\sqrt{k}A(n/k) \to \lambda \in \mathbb{R}$, cuando $n \to \infty$, tenemos :*

$$\sqrt{k}\psi(k/n)Q(1-k/n)\left(\Pi_\psi - \Pi_\psi\right) \to \mathcal{N}\left(\lambda\mu_\psi(\gamma,\xi,\beta), \sigma_\psi^2(\gamma,\beta)\right)$$

donde

$$\mu_{\psi}(\gamma,\xi,\beta)=\frac{\beta\xi(\gamma\beta+\beta-1)}{(1-\xi)(\gamma\beta+\xi\beta-1)(1-\gamma\beta)^{2}}$$

y

$$\sigma_{\psi}^{2}(\gamma,\beta)=\frac{\beta\gamma^{2}(\gamma\beta+\beta-1)}{(2\gamma\beta+\beta-2)(1-\beta\gamma)^{4}}$$

Algunos casos especiales

Podemos definir las siguientes expresiones de σ^2 de las pocas funciones de distorsión ψ .

En el caso particular donde la función de distorsión ψ es una función de potencia, es decir $\psi(t)=t^{1/\xi}$ (que corresponde al PHT, en este caso, $\beta=\xi$) su estimador correspondiente Π_{ψ} es el propuesto por Necir y Meraghni [2009].

Teorema 5.3. *Sea* F *un fdr que satisface (2.10) con* $\gamma>1/2$ *y con una función de cuantiles* $Q(.)$ *continuamente diferenciable en* $[0,1)$. *Sea* $k=k_n$ *una secuencia intermedia y* $\sqrt{k}A(n/k)\to 0$ *cuando* $n\to 0$. *Para* $1\leq\xi<1/\gamma$, *tenemos*:

$$\frac{\sqrt{n}\left(\Pi_{PHT,n}(X)-\Pi_{PHT}(X)\right)}{(k/n)^{\xi-1/2}Q(1-k/n)}\xrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{N}\left(\mu_{\psi}(\gamma,\xi,\tau),\sigma_{\psi}^{2}(\gamma,\xi)\right),\ n\to 0$$

donde

$$\mu_{\psi}(\gamma,\xi,\tau)=\frac{\xi\tau(\gamma\xi+\xi-1)}{(1-\tau)(\gamma\xi+\tau\xi-1)(1-\gamma\xi)^{2}}$$

y

$$\sigma_{\psi}^{2}(\gamma,\xi)=\frac{\beta\gamma^{2}(\gamma\xi+\xi-1)}{(2\gamma\xi+\xi-2)(1-\xi\gamma)^{4}}$$

Teorema 5.4. *(Normalidad asintótica de* $\Pi_{PHT,R_{opt}}$ *)*

Si suponemos que (10) cumple con $t^{-1/\xi}U(t)\to 0$, *para un valor fijado* $\xi\geq 1$ *y* $0<\gamma<1/\xi$ *cuando* $t\to\infty$. *Entonces, para una secuencia intermedia* $k=k_n$ *y* $\sqrt{k}A(n/k)\to\lambda\in\mathbb{R}$. *Tenemos, cuando* $n\to\infty$:

$$\left(\Pi_{PHT,R_{opt}}-\Pi_{PHT,R_{opt}}\right)\xrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{N}\left(\lambda\mu,\sigma_{R}^{2}(\xi,\gamma)\right)\qquad(32)$$

donde

$$\mu_R = \frac{\rho\gamma(\xi\gamma+\xi-1)}{(1-\rho)(\xi\gamma+\xi\rho-1)(1-\xi\gamma)^2}$$

y

$$\sigma_R^2(\xi,\gamma) = \frac{\xi^2\gamma^2(\gamma^2+\xi^2\gamma^4-2\xi\gamma^3+1)}{(1-\xi\gamma)^4}$$

En el caso particular donde la función de distorsión ψ es la función $t \mapsto \psi\left(t = \min\left(\frac{t}{\alpha},1\right),\ 0<\alpha\leq 1\right)$ (que corresponde al CTE, en este caso, $\beta = 1$) Necir y Meraghni [2010] introdujo un estimador del CTE para grandes pérdidas de cola, que es otro caso especial de Π_ψ.

Teorema 5.5. *(normalidad asintótica de $\Pi_{CTE,n}$)*

Sea F una fdr que satisface la condición (10) con $\gamma \in (1/2,1)$. Entonces, para una secuencia intermedia $k = k_n$ y $\sqrt{k}A(n/k) \to \lambda$ cuando $n \to \infty$. Tenemos, para $\alpha \in (0,1)$:

$$\frac{\sqrt{n}(1-\alpha)\left(\Pi_{CTE,n}(X) - \Pi_{CTE}(X)\right)}{(k/n)^{1/2} X_{n-l:n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(\lambda\mu_{CTE}, \sigma_{CTE}^2\right), \text{ cuando } n \to \infty$$

donde

$$\sigma_{CTE}^2 = \frac{\gamma^2}{(1-\gamma)^2(2\gamma-1)}$$

Todos estos teoremas se pueden encontrar en Necir y Meraghni [2009], para el estimador de $\Pi_\psi(.)$, y $\Pi_{PHT}(.)$. Para el estimador de $\Pi_{\xi,R_{opt}}(.)$,, nos referimos a Necir & al. [2007] y para el estimador CTE nuestra referencia es Necir & al. [2010].

La consistencia de los estimadores se deriva inmediatamente de su normalidad asintótica en las condiciones correspondientes.

Bibliografía

Acerbi, C., Nordio, C., and Sirtori, C. (2001). Expected shortfall as a tool for financial risk management. arXiv preprint cond-mat/0102304. 53

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., and Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. Mathematical finance, 9(3):203–228. 1, 46, 48, 49, 50, 52, 53, 62, 73, 74

Bertsimas, D., Lauprete, G. J., and Samarov, A. (2004). Shortfall as a risk measure: properties, optimization and applications. Journal of Economic Dynamics and Control, 28(7):1353–1381. 53

Brahimi, B., Meddi, F., and Necir, A. (2012). Bias-corrected estimation in distortion risk premiums for heavy-tailed losses. Afrika Statistika, 7(1):474–490. 66, 70

Brahimi, B., Meraghni, D., Necir, A., and Zitikis, R. (2011). Estimating the distortion parameter of the proportional-hazard premium for heavy tailed losses. Insurance: Mathematics and economics, 49(3):325–334. 66, 70, 74, 76

Brazauskas, V., L. Jones, B., L. Puri, M., and Zitikis, R. (2008). Estimating conditional tail expectation with actuarial applications in view. Journal of Statistical Planning and Inference, 138(11):3590–3604. 66, 68

Centeno de Lourdes, M. and Andrade e Silva, J. (2005). Applying the proportional hazard premium calculation principle. Astin Bulletin, 35(2):409. 66

Deme, E. H., Girard, S., and Guillou, A. (2013). Reduced-bias estimator of the proportional hazard premium for heavy-tailed distributions. Insurance: Mathematics and Economics, 52(3):550–559. 66, 70

Deme, E. H. and Lo, G. S. (2013). Reduced-bias estimators for the distortion risk premiums for heavy-tailed distributions. 70

Denneberg, D. (1994). Non-additive measure and integral. Kluwer Academic Publishers,Dordrecht. 62

Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., and Kaas, R. (2005). Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models. 1 edition. 64

Föllmer, H. and Schied, A. (2002a). Convex measures of risk and trading constraints. Finance and Stochastics, 6(4):429–447. 49, 51

Föllmer, H. and Schied, A. (2002b). Robust preferences and convex measures of risk. In Advances in finance and stochastics, pages 39–56. Springer. 50

Furman, E. and Zitikis, R. (2008a). Weighted premium calculation principles. Insurance: Mathematics and Economics, 42(1):459–465. 66

Furman, E. and Zitikis, R. (2008b). Weighted risk capital allocations. Insurance: Mathematics and Economics, 43(2):263–269. 66

Greselin, F., Puri, M. L., and Zitikis, R. (2009). L-functions, processes, and statistics in measuring economic inequality and actuarial risks. Statistics and Its Interface, 2(2):227–245. 66

J. McNeil, A., Frey, R., and Embrechts, P. (2005). Quantitative Risk Management - Concepts, Techniques and Tools. Princeton Series in Finance. Princeton University Press. 52

Jones, B. L. and Zitikis, R. (2003). Empirical estimation of risk measures and related quantities. North American Actuarial Journal, 7(4):44–54. 65, 66, 68, 76

Jones, B. L. and Zitikis, R. (2005). Testing for the order of risk measures: an application of l-statistics in actuarial science. Metron, 63(2):193–211. 66

Jones, B. L. and Zitikis, R. (2007). Risk measures, distortion parameters, and their empirical estimation. Insurance: Mathematics and Economics, 41(2):279–297. 66

Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., and Denuit, M. (2008). Modern Actuarial Risk Theory: Using R. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2 edition. 59

Necir, A. and Boukhetala, K. (2004). Estimating the riskadjusted premium for the largest claims reinsurance covers. In COMPSTAT 2004–Proceedings in Computational Statistics, pages 1577–1584. 66, 69, 70

Necir, A. and Meraghni, D. (2009). Empirical estimation of the proportional hazard premium for heavy-tailed claim amounts. Insurance: Mathematics and Economics, 45(1):49–58. iv, v, 4, 66, 69, 70, 71, 72, 73, 75, 78, 82

Necir, A. and Meraghni, D. (2010). Estimating l-functionals for heavytailed distributions and application. Journal of Probability and Statistics, 2010:34. 66, 71

Necir, A., Meraghni, D., and Meddi, F. (2007). Statistical estimate of the proportional hazard premium of loss. Scandinavian Actuarial Journal, 3(3):147–161. 66, 69, 70, 72, 83, 84, 85

Necir, A., Rassoul, A., and Zitikis, R. (2010). Estimating the Conditional tail expectation in the case of heavy-tailed losses. Journal of Probability and Statistics, 2010(ID 596839):1–17. 70, 72

Peng, L. (2001). Estimating the mean of a heavy tailed distribution. Statistics & Probability Letters, 52(3):255–264. 66, 70

Peng, L., Qi, Y., Wang, R., and Yang, J. (2012). Jackknife empirical likelihood method for some risk measures and related

Rassoul, A. (2012). Reduced bias estimation of the reinsurance premium of loss distribution. Journal of Statistics Applications & Probability, 1(2):147. 66, 70

Rockafellar, R. T. and Uryasev, S. (2000). Optimization of Conditional value-at-risk. Journal of risk, 2(3):21–42. 53

Rolski, T., Schimidli, H., Schmidt, V., and Teugels, J. (1999). Stochastic processes for insurance and finance, volume 505. John Wiley & Sons. 59, 74

Shorack, G. R. and Wellner, J. A. (1986). Empirical processes with applications to statistics. Wiley. 66, 76

Vandewalle, B. and Beirlant, J. (2006). On univariate extreme value statistics and the estimation of reinsurance premiums. Insurance: Mathematics and Economics, 38(3):441–459. 69

Wang, S. (1995). Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms. Insurance: Mathematics & Economics, 17(1):43–54. 59, 63

Wang, S. (1996). Premium calculation by transforming the layer premium density. Astin Bulletin, 26(01):71–92. 59, 74

Wang, S. (2001). A risk measure that goes beyond coherence. Research Report, pages 1–18. 59

Wang, S. S. (2000). A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks. Journal of Risk and Insurance, 67(1):15–36. 59, 64

Weissman, I. (1978). Estimation of parameters and large quantiles based on the k largest observations. Journal of the American Statistical Association, 73(364):812–815. 16, 44, 69, 77

Wirch, J. L. and Hardy, M. R. (1999). A synthesis of risk measures for capital adequacy. Insurance: Mathematics and Economics, 25(3):337–347. 53, 62, 63, 74

Wirch, J. L. and Hardy, M. R. (2001). Distortion risk measures: coherence and stochastic dominance. In International Congress on Insurance: Mathematics and Economics, pages 15–17. 62

Yaari, M. E. (1987). The dual theory of choice under risk. Econometrica: Journal of the Econometric Society, pages 95–115. 59

Young, V. R. (2004). Premium principles. Encyclopedia of actuarial science. 57