

WORKING PAPER



MODELOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE TABLAS DE MORTALIDAD

Por: Eduardo Court M

Profesor de la Escuela de Post Grado de la USMP

Correo: eduardocourtm@yahoo.es

1.- Introducción

La construcción de una tabla de mortalidad (vida) en el marco paramétrico estándar no es un tema nuevo; El propósito de este capítulo es detallar las herramientas utilizadas para analizar las tablas de mortalidad, por un lado, y abordar la cuestión de la evolución de la mortalidad a lo largo del tiempo y los modelos para informar sobre ella.

Las tablas de mortalidad utilizadas por los aseguradores para sus tarifas y provisiones están generalmente reguladas. En la práctica, por defecto, se pueden usar las tablas de la población general, y los reglamentos establecen las condiciones bajo las cuales la organización puede usar sus propias tablas.

Desde el punto de vista del asegurador, podemos distinguir las tablas reglamentarias, que juegan un papel especial en la determinación de la tarifa y las provisiones, y las tablas de experiencia; Desde un punto de vista técnico, distinguimos las tablas transversales, o "tablas del momento" y las tablas prospectivas, integrando el aspecto dinámico de la mortalidad.

1.1 Las tablas reglamentarias

Las tablas reglamentarias tienen dos componentes:

- Tablas para seguros en caso de fallecimiento;
- Las tablas anteriores se usan con las diferencias de edad para el seguro de vida (excluyendo las rentas vitalicias).

Normalmente, los legisladores tienen en cuenta la necesidad de utilizar tablas de mortalidad prospectiva para rentas vitalicias. Estas tablas sirven para la fijación de precios y el aprovisionamiento de contratos de rentas vitalicias o rentas vitalicias diferidas.

1.2 Las tablas de experiencia

Como parte del monitoreo técnico de sus productos un asegurador puede desear usar tablas de experiencia en lugar de las tablas oficialmente válidas para justificar el nivel de prima pura en los contratos que cubre. Parece apropiado, en este contexto, identificar mejor cualquier "comportamiento" de la población asegurada que sería significativamente diferente de las tablas reglamentarias.

En la práctica, el uso de una tabla de experiencia consta de 3 etapas:

- La construcción de la tabla;
- La certificación inicial;
- El seguimiento anual para garantizar la sostenibilidad de la tabla.

Normalmente, estas requieren de una certificación, la misma que debe garantizar que la tabla permita la "provisión de disposiciones suficientes y prudentes". Este documento debe en particular:

- validar los datos utilizados y sus fuentes, ya sean internas o externas a la empresa,
- verificar las hipótesis de trabajo y los métodos utilizados para construir las tablas de vida o la incapacidad para el trabajo o las leyes de discapacidad
- garantizar que se respeten los principios de prudencia comúnmente aceptados, dados los riesgos involucrados (en particular la estabilidad de las tablas o las leyes de mantenimiento),
- definir con precisión las condiciones de aplicación y la validez de los elementos certificados, las estadísticas o los paneles de control que debe preparar periódicamente la empresa para permitir el seguimiento de los resultados de la experiencia.

El seguimiento debe ser anual. La validez de las tablas de vida está limitada a cinco años.

El punto importante que podemos recordar es que la certificación no se refiere a una tabla en absoluto, sino a una tabla utilizada para un contrato o un grupo de contratos particulares, especialmente con respecto al riesgo inducido por el contrato en cuestión.

1.3 El análisis de la mortalidad

Nos interesa la variable aleatoria T que representa la vida útil de un individuo; Suponemos que los individuos de la población son al principio idénticos, de modo que podamos tener muestras de la ley de T .

1.3.1 notaciones

Es conveniente considerar las variables T_x que representan la vida residual de un individuo condicionalmente al hecho de que está vivo a la edad x , es decir, $T_x =_d [T - x | T > x]$. Entonces podemos definir la probabilidad de supervivencia entre x y $x+t$ de la siguiente manera:

$${}_tP_x = P(T_x > t) = P(T > x+t | T > x) \quad (1)$$

y el cociente de mortalidad entre x y $x+t$:

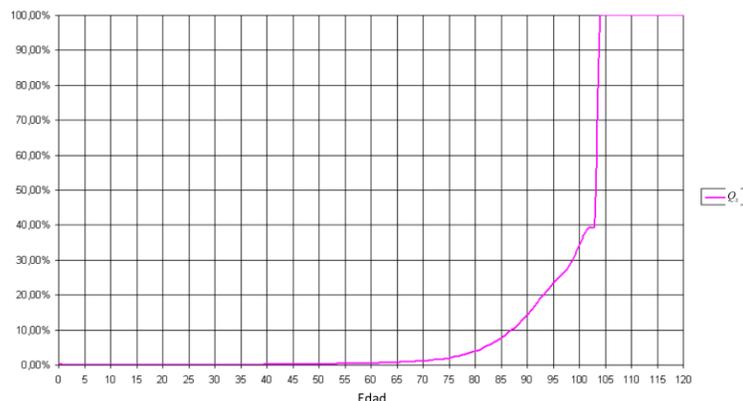
$${}_tq_x = 1 - {}_tP_x = P(T_x \leq t) = P(T \leq x+t | T > x) \quad (2)$$

Cuando $t = 1$ se omite de la notación, y simplemente escribimos $p_x = {}_1P_x$ y $q_x = {}_1q_x$.

Estos cocientes se expresan simplemente usando la función de supervivencia de T :

$${}_tP_x = \frac{S(x+t)}{S(x)} \quad (3)$$

Fig. Tasa de mortalidad específica en función de la edad.

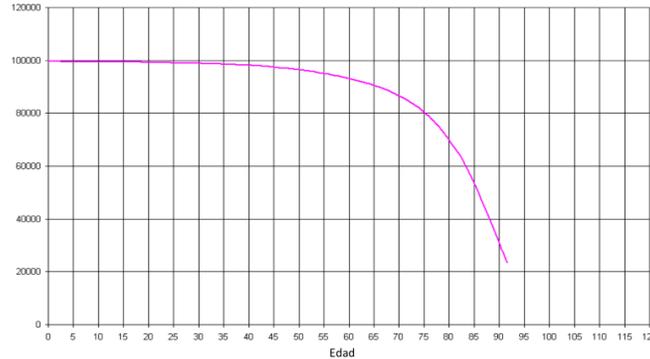


Es habitual observar (tiene una constante multiplicativa de normalización cercana) $l_x = S(x)$; el número de muertes entre x y $x+t$ se denomina ${}_td_x = l_x - l_{x+t}$; En el contexto del análisis

estadístico de la mortalidad de una cohorte, el tiempo vivido por los individuos de la cohorte entre x y $x+t$, es definido por:

$${}_tL_x = \int_0^t l_{x+u} du \quad (4)$$

Fig. Representación de la función de supervivencia



A partir de este indicador podemos definir la vida residual, que es un indicador característico de la tabla de vida:

$$E_x = \int_0^{+\infty} l_{x+u} du = \sum_{i=x}^{\infty} L_x \quad (5)$$

El cociente de mortalidad ${}_tq_x$ se calcula reportando un número de muertes durante el período con respecto al número al comienzo del período; la tasa de mortalidad se calcula comparando el número de muertes con el número promedio de muertes durante el período, a saber:

$${}_tm_x = \frac{{}_td_x}{{}_tL_x} \quad (6)$$

Los cocientes de mortalidad son probabilidades (números adimensionales), mientras que las tasas de mortalidad se expresan como la inversa de la unidad de tiempo y cuentan las muertes por persona en riesgo y por unidad de tiempo. Esta diferencia lleva a las siguientes relaciones con la función de azar, llamadas en este contexto "tasa de mortalidad instantánea":

$$\mu_{x+t} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} P(t < T_x \leq t+h | T_x > t) = \frac{1}{{}_tP_x} \frac{\partial} {\partial t} {}_tq_x \quad (7)$$

Ya que $h^{-1} P(t < T_x \leq t+h | T_x > t) = \frac{{}_{t+h}q_x - {}_tq_x}{h} {}_tP_x$; entonces cuando h es pequeño, ${}_h q_x \approx h\mu_x$ y

${}_h P_x \approx 1 - h\mu_x$. El vínculo entre la tasa de mortalidad instantánea y la tasa de mortalidad es directo:

$\mu_x = \lim_{h \rightarrow 0} {}_h m_x$, lo que justifica ex-post la terminología.

La relación entre la función de supervivencia condicional y la función de azar se escribe con la notación utilizada aquí:

$${}_t p_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right) \quad (8)$$

1.3.2 El diagrama de Lexis

En los estudios de mortalidad, rara vez se dispone de información precisa sobre las edades al morir y las fechas de muerte; estos datos suelen estar disponibles en forma redondeada, en edades y años redondeados. Para determinar correctamente las tasas brutas de mortalidad en este contexto, se utiliza un formalismo particular, el diagrama Lexis.

El análisis de la mortalidad de un grupo dado implica tres medidas de tiempo: la edad de los individuos, su generación (fecha de nacimiento) y la fecha de observación; por supuesto, estas 3 informaciones están vinculadas y el conocimiento de 2 de ellas determina la tercera. Cada una de estas dimensiones, sin embargo, es importante para determinar el nivel de mortalidad:

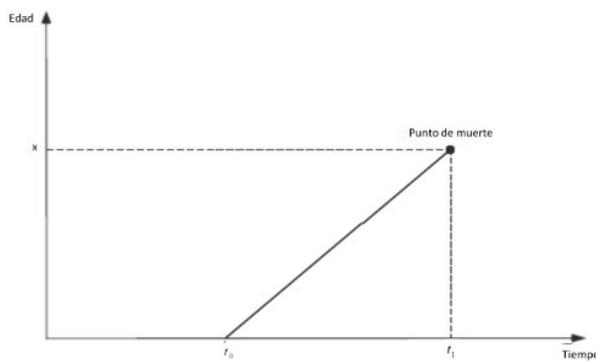
Edad: esta variable obviamente influye en el riesgo de muerte;

La fecha de observación: el riesgo de muerte puede variar de acuerdo con circunstancias como una epidemia, un evento excepcional (la ola de calor del verano de la India del 2019, por ejemplo), etc.

Generación: fenómenos como la mejora de las condiciones sanitarias, los avances en la medicina conducen a cambios en el riesgo de mortalidad a una edad determinada a lo largo del tiempo; además, se puede imaginar que el pasado de una generación determinada puede modificar el nivel de su mortalidad futura: por lo general, una epidemia que se produce en un momento t y que afecta a personas de edad x en esa fecha puede contribuir a reducir las tasas de mortalidad de muertes en edades superiores a x para esta generación, lo que lleva a la muerte prematura de los individuos menos resistentes.

Entonces es conveniente representar la vida de un individuo en un sistema rectangular de ejes llamado "diagrama Lexis", como sigue:

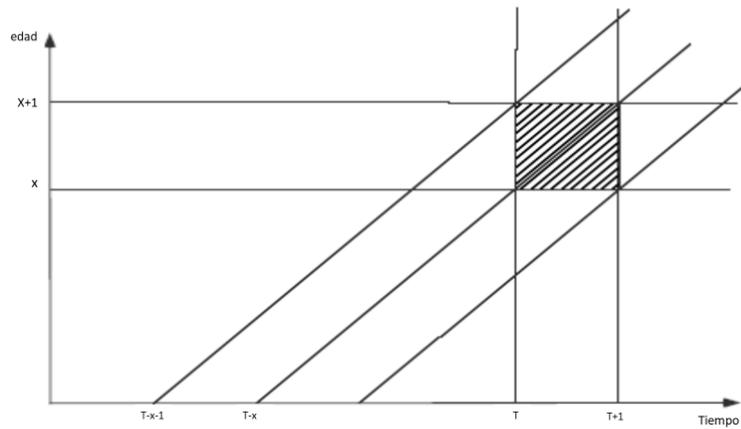
Fig. Diagrama de Lexis



La vida de un individuo, por lo tanto, está representada por una línea paralela a la primera bisectriz, que cruza el eje x en el año de nacimiento y se detiene en el "punto de muerte" el día de la muerte. Al trazar una banda horizontal entre x y $x+1$, se aislaron los individuos que murieron a la edad x , y al trazar una banda vertical entre g y $g+1$, se aislaron las muertes de individuos de la generación g . En este formalismo, x y g son números enteros, y x mide la edad en los últimos años.

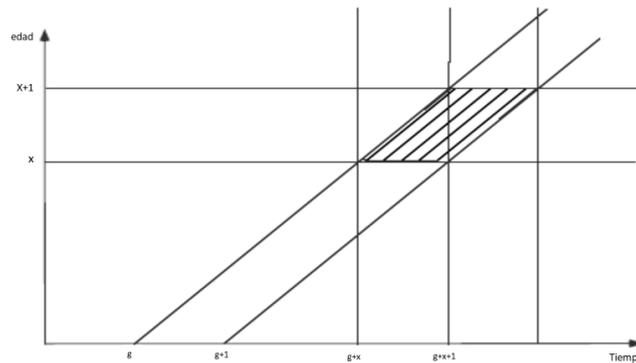
Los puntos mortuorios en el cuadro a continuación están asociados con muertes a la edad x en el año t :

Fig. Identificación de defunciones a la edad x año t



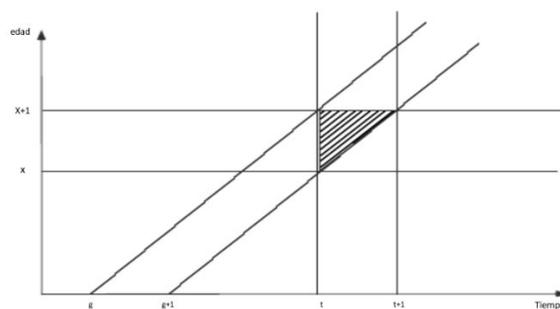
Los individuos en cuestión pertenecen a las generaciones $t-x$ y $t-x-1$. Del mismo modo, podemos contar el número de muertes a la edad x entre la generación g :

Fig. Identificación de defunciones a la edad x en la generación g .



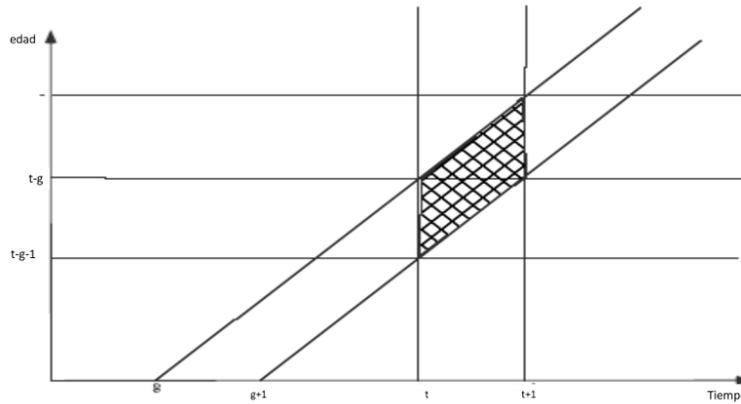
Estas muertes ocurrieron en los años $g+x$ y $g+x+1$. También obtenemos el número de muertes a la edad x entre la generación g durante el año t :

Fig. Identificación de muertes a edad x año t en generación g



Finalmente, el número de muertes en el año t entre los individuos de la generación g se puede representar de la misma manera:

Fig. Identificación de defunciones en generación g año t

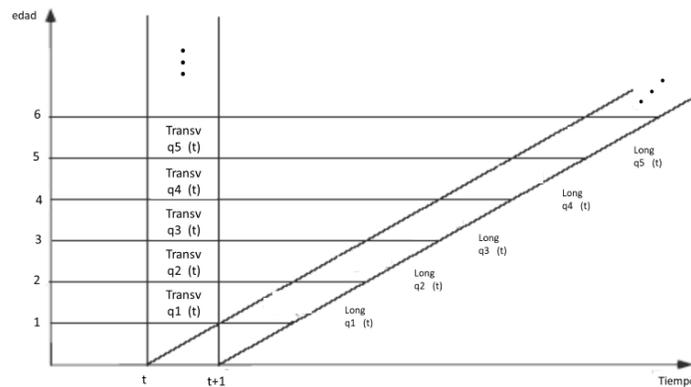


1.3.3 Mortalidad longitudinal y mortalidad transversal.

La medida "natural" de mortalidad consiste en contar las muertes que se producen durante un período determinado (por ejemplo, un año) y luego calcular las tasas de mortalidad específicas por edad relacionando este número de muertes con el número de personas en riesgo. Esto equivale a considerar una tira vertical del diagrama de Lexis.

Vemos que, si la mortalidad cambia con el tiempo, este enfoque sesga la medición de la mortalidad, más específicamente, en un período de tendencia descendente en la mortalidad, conduce a una subestimación de la esperanza de vida (o a una sobreestimación de las tasas de la muerte). De hecho, en este enfoque consideramos a individuos de diferentes generaciones para calcular las tasas de mortalidad, la tabla resultante no representa la mortalidad de ninguna generación real.

Fig. Mortalidad longitudinal y mortalidad transversal.



La mortalidad real de una generación se obtiene considerando las tasas a lo largo de una banda como se indica arriba.

Posteriormente, será necesario calcular el cociente de mortalidad a la edad x para el año t ; Este cociente involucra dos generaciones, $t-x$ y $t-x-1$. Por lo tanto, los siguientes "cocientes de

mortalidad parcial" se determinan al señalar como $D_{xt}(g)$ el número de muertes a la edad x para la generación g que ocurre en el año t :

$$\hat{q}_{xt}^1 = \frac{D_{xt}(t-x)}{l_{x,t+1} + D_{xt}(t-x)} \quad (9)$$

($l_{x,t+1}$ es el número de personas de edad x en 01/01/ $t+1$); Por lo tanto, el cociente se aproxima a la probabilidad de que los individuos de la generación $t-x$ mueran a la edad x año t . De manera similar, se estima la probabilidad de que los individuos de la generación $t-x-1$ mueran a la edad x año t :

$$\hat{q}_{xt}^2 = \frac{D_{xt}(t-x-1)}{l_{xt}} \quad (10)$$

El cociente buscado es el resultado de la agregación de estos 2 cocientes parciales: para sobrevivir entre su X^{iesimo} y su $(x+1)^{\text{iesimo}}$ cumpleaños, es necesario sobrevivir desde su x^{iesimo} cumpleaños hasta el final del año calendario, y luego desde el año calendario hasta su $(x+1)^{\text{iesimo}}$ aniversario, siendo:

$$1 - \hat{q}_{xt} = \left(1 - \hat{q}_{xt}^1\right) \left(1 - \hat{q}_{xt}^2\right) \quad (11)$$

Cuando queremos determinar la tasa de mortalidad a la edad x para el año t , calculamos de manera clásica, con notaciones obvias:

$$\hat{m}_x = \frac{D_{xt}}{(l_{x,t} + l_{x,t+1})/2} \quad (12)$$

1.3.4 Tasa de mortalidad por generación y por año.

Denominamos x a la edad total considerada, t el año actual y $g = t - x$ a la generación correspondiente.

Tenemos denominaciones obvias para la exposición al riesgo en $[x, x+1[\times [t, t+1[$:

$$E(x, t) = E(x, t, g) + E(x, t, g-1) \quad (13)$$

$E(x, t, g)$ es el tiempo pasado en $[x, x+1[\times [t, t+1[$ por los individuos nacidos en g después de su cumpleaños en el año t y $E(x, t, g-1)$ es el tiempo pasado en $[x, x+1[\times [t, t+1[$ por individuos nacidos en $g-1$ antes de su cumpleaños en el año t .

Del mismo modo, el número de muertes se escribe:

$$D(x, t) = D(x, t, g) + D(x, t, g-1) \quad (14)$$

De manera simétrica, los individuos de la generación g pueden morir a la edad x el año t o el año $t+1$ (su fecha de cumpleaños $x+1$ es en el año $t+1$):

$$E(x, g) = E(x, t, g) + E(x, t+1, g) \quad \text{y} \quad D(x, g) = D(x, t, g) + D(x, t+1, g) \quad (15)$$

Los estimadores de Hoem de las probabilidades condicionales de muerte $\hat{q} = \frac{D}{E}$ en la visión anual o generacional, por lo tanto, no están vinculados por una relación simple y en particular

$$\hat{q}_{an}(x, t) \neq \hat{q}_{gen}(x, t-x) \quad (16)$$

Suponiendo que cada generación tiene su propia tabla de vida, es mejor calcular $\hat{q}_{gen}(x, g) = \frac{D(x, g)}{E(x, g)}$ y luego trabajar por extrapolación con $\hat{q}(x, t) = \hat{q}_{gen}(x, t-x)$ en lugar de calcular directamente $\hat{q}_{an}(x, t)$.

1.3.5 Distribución de defunciones en el año.

Los datos disponibles son a menudo datos agregados en los que la unidad de tiempo es el año. Entonces es necesario darse una regla de distribución de las muertes en el año; Se proponen clásicamente tres hipótesis:

- La constancia de las tasas de muerte instantánea entre 2 edades no enteras (hipótesis exponencial): ${}_t q_x = 1 - (1 - q_x)^t$;
- La distribución lineal de muertes durante el año: ${}_t q_x = 1 - t \times q_x$;
- La hipótesis de Balducci, que postula que ${}_t q_x = \frac{t \times q_x}{1 - (1-t)q_x}$.

La hipótesis de Balducci se puede descartar desde el principio porque conduce a tasas de mortalidad decrecientes instantáneas entre 2 edades enteras; De hecho, encontramos en este modelo que:

$$\mu_{x+t} = -\frac{\partial}{\partial t} \ln({}_t p_x) = \frac{q_x}{p_x + tq_x} \quad (17)$$

que resulta de ${}_t p_x = 1 - {}_t q_x = 1 - \frac{tq_x}{p_x + tq_x} = \frac{p_x}{p_x + tq_x}$.

La elección entre las dos hipótesis restantes no es neutral en la evaluación del nivel de mortalidad. De hecho, si T_x^c y T_x^l son los tiempos de vida residuales respectivamente en el modelo de constancia de tasas instantáneas y en el modelo de distribución lineal de decesos, tenemos, con notaciones obvias: $S_x^l(t) \geq S_x^c(t)$, lo que implica en particular que $e_x^l(t) \geq e_x^c(t)$; el supuesto de la constancia de las tasas instantáneas conduce, por lo tanto, a una vida más corta: como resultado, se trata de un supuesto conservador en el caso de garantías en caso de muerte, lo que es menos prudente para los contratos de rentas anuales. Sin embargo, la brecha entre los dos enfoques es pequeña.

Para probar la desigualdad $S_x^l(t) \geq S_x^c(t)$, hacemos $t = k + r$ con $k = [t]$ y $0 \leq r < 1$ y notamos que:

$$S_x^l(t) = P(T_x^l > k + r) = {}_k p_x (1 - r q_{x+k})$$

y

$$S_x^c(t) = P(T_x^c > k + r) = {}_k p_x p_{x+k}^r \quad (18)$$

La desigualdad a demostrar es, por lo tanto, equivalente a $1 - r(1 - p_{x+k}) \geq p_{x+k}^r$, y esta última desigualdad es la consecuencia directa (Incluso tenemos desigualdad estricta si $r > 0$) de $(1+x)^r \leq 1+rx$ para todo $0 \leq r < 1$. En los modelos que se presentan a continuación, se lleva a cabo el supuesto de constancia de la tasa de mortalidad instantánea entre 2 edades completas, de modo que tenemos ${}_t q_x = 1 - (1 - q_x)^t$.

1.3.6 Indicadores sintéticos del nivel de mortalidad.

Las características de una tabla de vida generalmente se resumen a través de una serie de indicadores: la expectativa de vida y la entropía son dos indicadores importantes, que se presentan a continuación.

1.3.6.1 Esperanza de vida residual

La esperanza de vida residual es por definición $e_x = E(T_x) = \frac{E_x}{l_x}$; entonces tenemos $e_x = \frac{1}{l_x} \int_0^{+\infty} l_{x+u} du$

Se deduce en particular de esta expresión que:

$$\frac{de_x}{dx} = -1 + \mu_x e_x \quad (19)$$

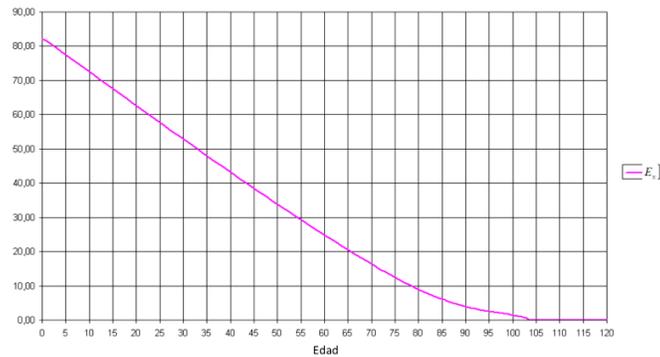
En efecto $\frac{d}{dx} e_x = \frac{-l_x^2 - \left(\frac{d}{dx} l_x\right) \int_0^{+\infty} l_u du}{l_x^2}$, y como $\mu_x = \frac{d}{dx} \ln l_x$, tenemos la igualdad de arriba.

La versión discreta de esta fórmula es simplemente $e_x = \frac{1}{L_x} \sum_{h>0} L_{x+h}$.

Este término significa que cuando la tasa de mortalidad es pequeña, la esperanza de vida residual disminuye en aproximadamente un año cada año; Por otro lado, cuando la tasa de mortalidad es alta, uno puede tener una esperanza de vida residual que aumenta.

Desde un punto de vista práctico, esto significa que la gráfica de la e_x está alineada en una recta de pendiente -1 hasta aproximadamente 75 años, para curvarse luego, como se puede ver en la siguiente gráfica:

Fig. Esperanza de vida residual según edad.

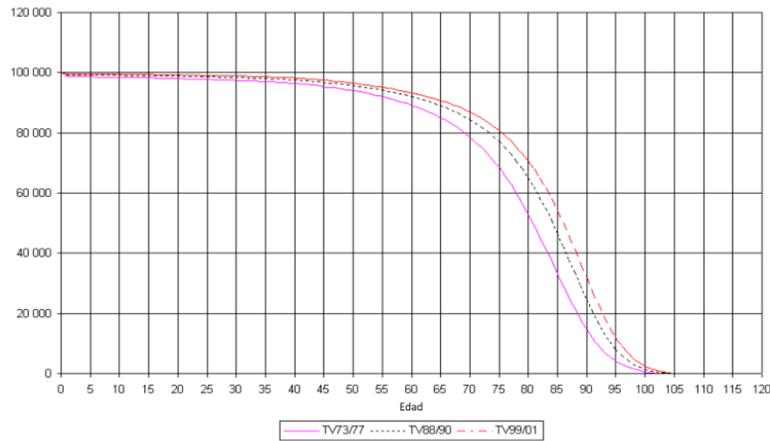


A partir de los 75 años, un ajuste polinomial de segundo orden generalmente funciona correctamente (lo que proporciona una parametrización simple de una tabla de vida del momento). Se puede observar que la esperanza de vida residual puede interpretarse como el precio de una renta vitalicia continua descontada a una tasa de 0.

1.3.6.2 Entropía

La disminución en las tasas de mortalidad a edades tempranas, sin que la aparente edad final de la vida cambie significativamente, da como resultado un fenómeno de tablas de mortalidad por "ortogonalización", cada vez más personas mueren a una edad elevada (Este fenómeno está acompañado por una disminución en la variación de la vida útil a lo largo del tiempo):

Fig. fenómeno de ortogonalización de las tablas de vida.



La entropía propone medir este fenómeno; Lo definimos por:

$$H = - \frac{\int_0^{+\infty} l_x \ln(l_x) dx}{\int_0^{+\infty} l_x dx} \quad (20)$$

Como tenemos $\mu_x = \frac{d}{dx} \ln(l_x)$, Podemos reescribir esta cantidad en la forma:

$$H = \frac{\int_0^{+\infty} l_x \mu_x e_x dx}{l_0 e_0} \quad (21)$$

La versión discreta de esta fórmula es $H = - \frac{\sum_{h>0} L_{x+h} \ln(L_{x+h})}{\sum_{h>0} L_{x+h}}$.

Por lo tanto, la entropía reporta el número promedio de “años perdidos” debido a la muerte con el número de años posibles “en stock” en la fecha 0.

Podemos notar que $H = 0$ sí y solo si todas las muertes ocurren a la misma edad y que $H = 1$ corresponde a la situación extrema opuesta en la que la tasa instantánea de mortalidad es constante: esta magnitud medida está bien adaptada al fenómeno de la ortogonalización. La entropía pasó de aproximadamente el 50% a finales del siglo 19 al 15% en el siglo 21 actual.

1.4 Algunos indicadores

El propósito de esta parte es proporcionar algunos órdenes de magnitud útiles en el nivel de mortalidad. También ilustra cómo cuantificar el impacto en la mortalidad de características particulares de la población, tomando el ejemplo del criterio de fumar / no fumar.

1.4.1 datos generales¹

La esperanza de vida al nacer y a los 60 años, así como la tasa de mortalidad a esta edad, se muestran en la siguiente tabla:

	Mujeres			Hombres		
	TV 73/77	TV 88/90	TV 99/01	TD 73/77	TD 88/90	TD 99/01
nacimiento	76,5	80,2	82,2	68,6	72,0	74,7
60 años	20,9	23,5	25	16,1	18,3	19,9
q60	0,77%	0,57%	0,48%	1,90%	1,57%	1,18%

Esta tabla muestra claramente las disparidades entre hombres y mujeres:

	Mujeres/Hombres		
	TV 73/77	TV 88/90	TV 99/01
nacimiento	112 %	111 %	110 %
60 años	130 %	128 %	126 %
q60	41 %	37 %	41 %

También leemos la tendencia a la disminución de la mortalidad:

	Mujeres		Hombres	
	TV 88/90 / TV 73/77	TV 99/01 / TV 88/90	TD 88/90 / TD 73/77	TD 99/01 / TD 88/90
nacimiento	105 %	102 %	105 %	104 %
60 años	112 %	106 %	114 %	109 %
q60	74 %	85 %	82 %	75 %

¹ Según un estudio realizado por la Oficina del Censo de Estados Unidos 2015.

La diferencia en la mortalidad entre hombres y mujeres se refleja en el hecho de que, en los países desarrollados, hay 70 hombres por cada 100 mujeres en los mayores de 60 años y 44 hombres por cada 100 mujeres en los mayores de 80 años.

1.4.2 impacto del tabaquismo

El impacto del tabaquismo en la mortalidad se ilustra sobre la base de:

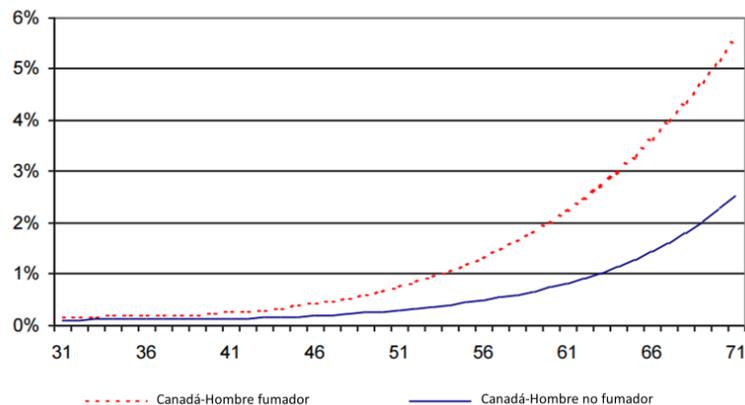
- Estudio de tablas masculinas canadienses fumadoras / no fumadoras.
- Estudios epidemiológicos realizados por la OMS.

1.4.2.1 Estudio de tablas canadienses.

La naturaleza no fumadora del asegurado tiene un impacto favorable en su mortalidad. En Canadá, los estudios han llevado al establecimiento de tablas de vida para hombres mayores de 30 años diferenciados según esta característica. Su estudio nos permite cuantificar el impacto del tabaquismo en la mortalidad.

El siguiente gráfico muestra la evolución de la tasa de mortalidad anual según la edad según el hombre fume o no fume.

Fig. Comparación de tasas de mortalidad por tabaquismo y no fumador



Como era de esperarse, las tasas de mortalidad de los fumadores son sistemáticamente superiores a las de los no fumadores. La reducción de la mortalidad por parte de los no fumadores con relación a los fumadores tiene un máximo de 59 años (63,35%).

La reducción media entre 31 y 71 años se sitúa en el 53,4%. Este análisis mide el impacto del tabaquismo en la mortalidad. En comparación con la población general, la reducción para no fumadores promedia el 20% entre 31 y 70 años de edad.

Fig. Mortalidad de los no fumadores en relación con la población general (hombres)

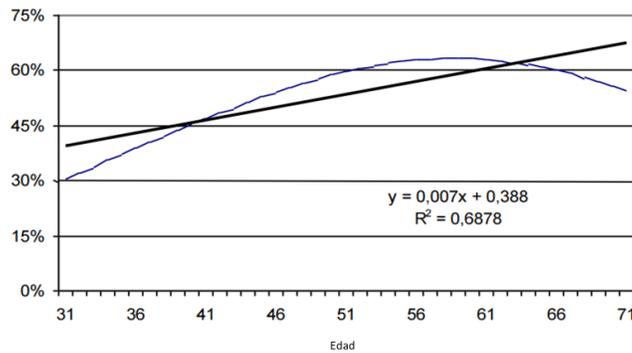
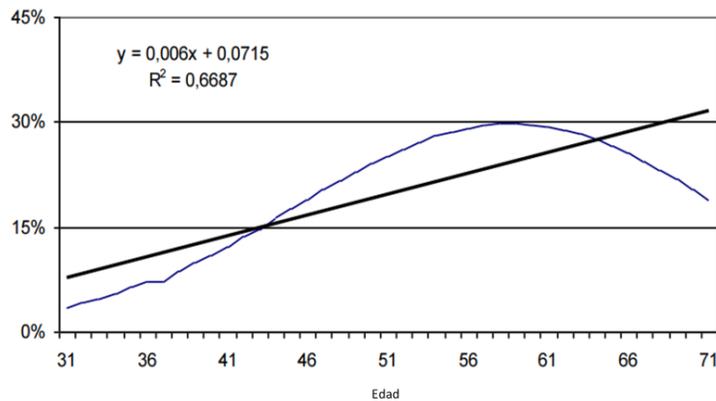


Fig. Mortalidad de los no fumadores en relación con la población general (hombres)



Se alcanza un máximo a los 58 años con una tasa de reducción de casi el 30%.

1.4.2.2 estudios de la OMS

El estudio "Tabaquismo y mortalidad: aspectos epidemiológicos" proporciona indicadores interesantes para cuantificar la sub mortalidad de los no fumadores. Así, los elementos clave se pueden resumir de la siguiente manera:

- Entre los 39 y 65 años de edad, 1 de cada 3 muertes entre los hombres es atribuible al tabaco y 1 de cada 16 decesos entre las mujeres.
- Entre las edades de 35 y 49 años, el 40% de los hombres y el 29% de las mujeres son fumadores regulares. Estos porcentajes disminuyen a 28% y 14% respectivamente entre 50 y 64 años.

Suponiendo que estas proporciones son homogéneas en los rangos de edad indicados, es posible estimar la sub mortalidad de los no fumadores en comparación con los fumadores. Veamos:

- q_{tabac} La tasa de mortalidad relacionada con el tabaquismo,
- q la tasa de mortalidad de no fumadores,
- π_F la proporción de fumadores,
- π_{NF} la proporción de no fumadores,
- δ La proporción de muertes por fumar.

$$\frac{\pi_F \times q_{tabac}}{\pi_F \times (q + q_{tabac}) + \pi_{NF} \times q} = \delta$$

Entonces:

$$\frac{q_{tabac}}{q} = \frac{\delta}{\pi_F \times (1 - \delta)} \quad (22)$$

Por lo tanto, la tasa de sub mortalidad de los no fumadores en relación con el fumador se escribe:

$$1 - \frac{q}{q + q_{tabac}} = 1 - \frac{\pi_F \times (1 - \delta)}{\delta + \pi_F \times (1 - \delta)} \quad (23)$$

Las tasas calculadas a partir de los elementos de la OMS se resumen en la siguiente tabla:

	Hombres	Mujeres
35-49 años	55,56 %	20,41 %
50-64 años	64,10 %	32,26 %

Para los hombres, las tasas de baja mortalidad de los no fumadores en comparación con los fumadores (56% y 64%) son comparables a las de las tablas canadienses (53%).

Estas mismas tasas son más bajas para las mujeres; sin embargo, el tabaquismo femenino es más reciente y su impacto es menos conocido que el de los hombres.

Suponiendo que las proporciones de fumadores mencionadas anteriormente son homogéneas en todos los grupos de edad, las bajas tasas de mortalidad de los no fumadores en relación con la población en general vienen dadas por:

	Hombres	Mujeres
35-49 años	33,33 %	6,25 %
50-64 años	31,71 %	6,25 %

Las tasas masculinas son ligeramente más altas de lo que se observa en las tablas canadienses. Las tasas femeninas son significativamente más bajas que las masculinas.

1.5 La construcción de tablas de mortalidad (vida) de experiencia.

1.5.1 Marco general

Nos colocamos aquí en el contexto paramétrico; el proceso de construir una tabla sistemáticamente involucra dos etapas: primero, la estimación de las tasas brutas, por edad, o por edad y generación en el caso de tablas prospectivas, y luego el ajuste de estas tasas brutas a un modelo paramétrico.

En la práctica, se pueden distinguir dos situaciones: en primer lugar, la situación de "referencia" donde hay suficientes datos disponibles para construir una tabla confiable. Pero en algunos casos, los datos disponibles pueden no ser suficientes para determinar la estructura de la tabla de una manera suficientemente precisa, y luego será posible simplemente ubicar la mortalidad del grupo bajo estudio en relación con una mortalidad de referencia, lo que proporcionará la estructura general.

El procedimiento estándar para construir una tabla de vida en un marco paramétrico nos hace recordar que se basa en la elección de una forma paramétrica para la función de riesgo, con el

Vimos que en este contexto se podría proponer un estimador de "mínimos cuadrados ordinarios" para $\theta = -\ln(\alpha)$. Obtenemos así el estimador:

$$\hat{\alpha} = \exp\left(\gamma - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln H_{ref}(x_i)\right) = e\gamma \left[\prod_{i=1}^n H_{ref}(x_i) \right]^{\frac{1}{n}} \quad (25)$$

con γ la constante de Euler² y $H_{ref}(x) = -\ln S_{ref}(x) = -\ln L_x^{ref}$ la función de riesgo acumulativo.

También se puede considerar como criterio para la elección del parámetro α la diferencia entre el número de muertes observadas y el número teórico de muertes asociadas con la tabla usada. Definiendo L_x^{obs} como el número de muertes en riesgo a la edad x en la población en cuestión, el número de muertes pronosticadas por la tabla usada a la edad x es $\alpha \times q_x^{ref} \times L_x^{obs}$. Si restringimos el número total de muertes pronosticadas para igualar el número observado, obtenemos la siguiente estimación de α :

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_x D_x^{obs}}{\sum_x q_x^{ref} \times L_x^{obs}} \quad (26)$$

Un enfoque alternativo es razonar edad por edad y considerar una estadística Khi-2 definida por:

$$\chi(\alpha) = \sum_{i=1}^n L_x^{obs} \frac{(q_x^{obs} - \alpha \times q_x^{ref})^2}{\alpha \times q_x^{ref}} \quad (27)$$

y buscar el valor de α que hace que esta distancia sea mínima.

1.5.2 Tablas prospectivas

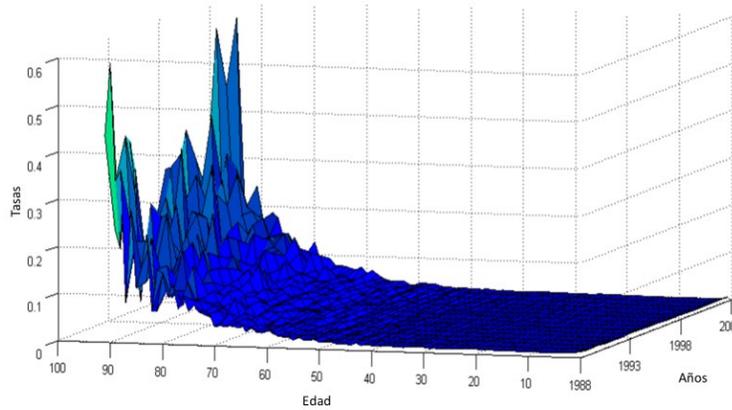
El objetivo de las tablas prospectivas es tener en cuenta la evolución futura de la mortalidad; Los métodos habituales primero buscan ajustar las tendencias pasadas y luego extrapolarlas en el futuro. El enfoque prospectivo de integrar el efecto del progreso médico futuro en el futuro no se examina aquí.

Los modelos utilizados proponen ajustar las tasas brutas calculadas por métodos como el presentado en 1.3.3 anterior a un modelo paramétrico, por un lado, para suavizar las fluctuaciones de muestreo y por otro lado para proyectar la evolución de las tasas en el futuro, por extrapolación.

Las tasas de tasas brutas indexadas por edad x y año calendario t , generalmente se ven así:

² Cuyo valor es aproximadamente 0.577215665.

Fig. Tasa bruta de mortalidad por año



La transición de los cocientes de mortalidad bruta a la tasa de mortalidad instantánea, que es la variable modelada en algunos enfoques, se basa en un supuesto sobre la distribución de muertes en el año (ver 1.3.5 más arriba); en el caso de que uno asuma la constancia de la frecuencia instantánea en cada cuadrado del diagrama de Lexis, obtenemos el siguiente estimador:

$$\mu_{xt}^* = -\ln(1 - \hat{q}_{xt}) \quad (28)$$

Se debe prestar especial atención al cálculo del estimador \hat{q}_{xt} para evitar la mezcla de diferentes generaciones y los sesgos resultantes (ver Guibert y Planchet [2017]).

1.5.3 El modelo de Lee-Carter.

Este es un método de extrapolación de tendencias pasadas utilizadas inicialmente en datos de EE. UU., que rápidamente se convirtió en un estándar (Lee y Carter [1992]). El modelo adoptado para la tasa de mortalidad instantánea es el siguiente:

$$\ln \mu_{xt} = \alpha_x + \beta_x k_t \quad (29)$$

o, de manera equivalente:

$$\ln \mu_{xt}^* = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{xt} \quad (30)$$

La idea del modelo es, por lo tanto, ajustarse a las series (indexadas doblemente por x y t) de los logaritmos de las tasas de muerte instantáneas a una estructura paramétrica (determinista) a la que se agrega un fenómeno aleatorio; El criterio de optimización elegido consistirá en maximizar la varianza explicada por el modelo, lo que equivale a minimizar la varianza de los errores.

El parámetro α_x se interpreta como el valor promedio de $\ln(\mu_{xt})$ a lo largo del tiempo.

Probamos que $\frac{d \ln(\mu_{xt})}{dt} = \beta_x \frac{dk_t}{dt}$ y deducimos que el coeficiente β_x expresa la sensibilidad de la mortalidad instantánea a la edad x con respecto a la evolución general k_t , en el sentido de que

$\frac{d \ln(\mu_x)}{dk_t} = \beta_x$. En particular, el modelo de Lee-Carter asume la constancia a lo largo del tiempo de esta sensibilidad. Esta restricción del modelo puede parecer relativamente fuerte:

- Para cualquier edad x , los cocientes de las variaciones relativas de las tasas de mortalidad en diferentes fechas no dependen de la edad x . Si el cambio relativo en la tasa de mortalidad a 50 años en el 2018 fue del 80% del de 1990, se usa el coeficiente del 80% para todas las edades;
- Para la misma fecha, los cocientes de los cambios relativos en las tasas de mortalidad a diferentes edades no dependen de la fecha t . Si en el año 2018 el cambio relativo en la tasa de mortalidad a 20 años es del 50% del cambio en la tasa relativa a 50 años, este coeficiente del 50% se aplicará a cualquier fecha futura o pasada.

Finalmente, se puede observar que la forma del modelo implica la homocedasticidad de las tasas de mortalidad, lo que obviamente es incorrecto en la práctica. Esta desventaja se tratará con más detalle en 1.5.4.

Para que el modelo sea identificable, es necesario agregar restricciones a los parámetros; de hecho, para cualquier constante no nula c , el modelo es invariante por las siguientes transformaciones:

$$(\alpha_x, \beta_x, k_t) \rightarrow \left(\alpha_x, \frac{\beta_x}{c}, c \times k_t \right) \quad (31)$$

$$(\alpha_x, \beta_x, k_t) \rightarrow (\alpha_x - c\beta_x, \beta_x, k_t + c)$$

Por lo tanto, es necesario imponer dos restricciones a los parámetros. Las siguientes restricciones son generalmente usadas:

$$\sum_{x=x_m}^{x_M} \beta_x = 1 \text{ y } \sum_{t=t_m}^{t_M} k_t = 0 \quad (32)$$

Los parámetros se obtienen luego por un criterio de mínimos cuadrados (no lineales):

$$(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, k_t) = \arg \min \sum_{x,t} (\ln \mu_{xt}^* - \alpha_x - \beta_x k_t)^2 \quad (33)$$

Por lo tanto, es apropiado resolver este programa de optimización, bajo las limitaciones de la identificabilidad. El número de parámetros a estimar es alto, es igual a: $2 \times (x_M - x_m + 1) + t_M - t_m - 1$

1.5.3.1 Estimación de parámetros

Con respecto a (α_x) , como:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_x} \sum_{y,t} (\ln \mu_{yt}^* - \alpha_y - \beta_y k_t)^2 = 2(t_M - t_m + 1) \alpha_x - 2 \sum_{t=t_m}^{t_M} (\ln \mu_{xt}^* - \beta_x k_t) \quad (34)$$

encontramos teniendo en cuenta la restricción $\sum_{t=t_m}^{t_M} k_t = 0$ que:

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{T_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} \ln \mu_{xt}^* \quad (35)$$

En otras palabras, $\hat{\alpha}_x$ es la media temporal, en la edad x , de las tasas de muerte instantáneas (en escala logarítmica). Luego consideramos la matriz $Z = (z_{xt})$ de las tasas centradas con respecto a la dimensión temporal:

$$Z_{xt} = \ln \mu_{xt}^* - \hat{\alpha}_x \quad (36)$$

Z es una matriz de dimensión $(x_M - x_m + 1, t_m + 1)$. La forma del modelo equivale a buscar una aproximación de Z en el producto de 2 vectores de la forma $Z \approx \hat{\beta} \hat{k}'$, de modo que la descomposición sea óptima en el significado del criterio de los mínimos cuadrados, es decir, explica la mayor parte posible de la varianza total. La resolución de este problema pasa por la descomposición en valores propios de la matriz Z , que se pone en la forma:

$$Z = \sum_{i \geq 1} \sqrt{\lambda_i} v_i u_i' \quad (37)$$

con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq 0$ los valores propios de $Z'Z$, u_i el vector propio normado ($u_i' u_i = 1$) de $Z'Z$ asociado con λ_i , y v_i el vector propio asociado con el mismo valor propio para ZZ' . Esto se justifica por el hecho de que, dado que $Z'Z u_i = \lambda_i u_i$, tenemos $ZZ'(Z u_i) = \lambda_i Z u_i$, y por lo tanto las dos matrices transpuestas tienen los mismos valores propios con idénticos órdenes de multiplicidad. Además, si u_i es un vector propio de $Z'Z$, entonces $Z u_i$ es un vector propio de ZZ' asociado con el mismo valor propio. Si ponemos $v_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Z u_i$, vemos que $Z u_i u_i' = \sqrt{\lambda_i} v_i u_i'$, que al sumar y tener en cuenta la orto normalidad de los vectores propios, conduce a la descomposición de Z .

De este modo, nos proponemos como aproximación $Z \approx \sqrt{\lambda_1} v_1 u_1'$, y con una medida de la calidad de esta aproximación, la parte de inercia explicada, $\frac{\lambda_1}{\sum \lambda_i}$. Finalmente se obtienen los siguientes estimadores de β y k :

$$\hat{\beta} = \frac{1}{\sum v_{1j}} \text{ y } \hat{k} = \sqrt{\lambda_1} \sum v_{1j} u_{1j} \quad (38)$$

El objetivo es utilizar los resultados de este ajuste para extrapolar las tasas de mortalidad de $t > t_M$; la idea es analizar la serie de (\hat{k}_t) , que captura la información sobre la evolución temporal de estas tasas para adaptarse a un modelo de tipo ARIMA.

En esta etapa tenemos una primera estimación de los parámetros del modelo; sin embargo, si uno se encuentra en una situación en la que el número de personas en riesgo es muy grande, puede decirse que las fluctuaciones de muestreo en el número total de muertes por edad deben ser muy

pequeñas. Por lo tanto, es conveniente ajustar los parámetros del modelo de antemano para que el número de muertes pronosticadas por el modelo cada año sea igual al número de muertes observadas. Como la exposición al riesgo es $L_{xt} = \frac{D_{xt}}{\mu_{xt}^*}$ con $D_{xt} = D_{xt}(t-x) + D_{xt}(t-x-1)$, esta restricción se expresa por:

$$\sum_{x=x_m}^{x_M} D_{xt} = \sum_{x=x_m}^{x_M} L_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_t) \quad (39)$$

la variable es \hat{k}_t . Introducimos la función $F(k) = \sum_{x=x_m}^{x_M} L_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x k) - \sum_{x=x_m}^{x_M} D_{xt}$ de modo que la restricción anterior se expresa mediante $F(k) = 0$. La forma de la función F asegura la unicidad de la raíz si esta existe. La búsqueda de la raíz se puede hacer mediante un algoritmo de tipo Newton-Raphson, planteando:

$$k_{i+1} = k_i - \frac{F(k_i)}{F'(k_i)} \quad (40)$$

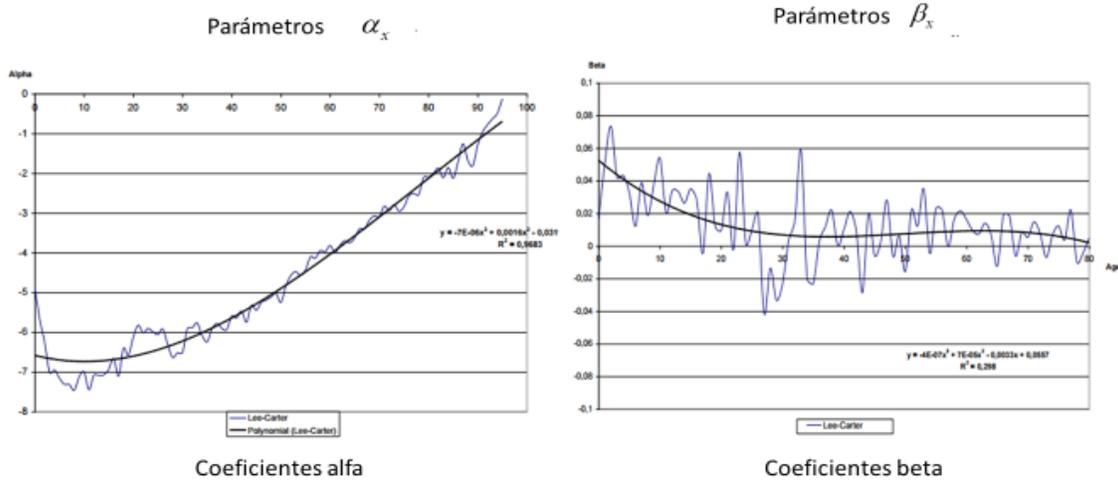
con el valor inicial $k_0 = \hat{k}_t$ y el criterio de parada $\frac{k_{i+1} - k_i}{k_i} \leq \varepsilon$ por ejemplo $\varepsilon = 10^{-7}$. Así obtenemos un nuevo estimador \hat{k}_t . Pero la serie (\hat{k}_t) así ajustada debe ser corregida para respetar la restricción de identificabilidad $\sum_{t=t_m}^{t_M} k_t = 0$, lo que lleva a plantear:

$$k_t^* = \hat{k}_t - \frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} \hat{k}_t \quad (41)$$

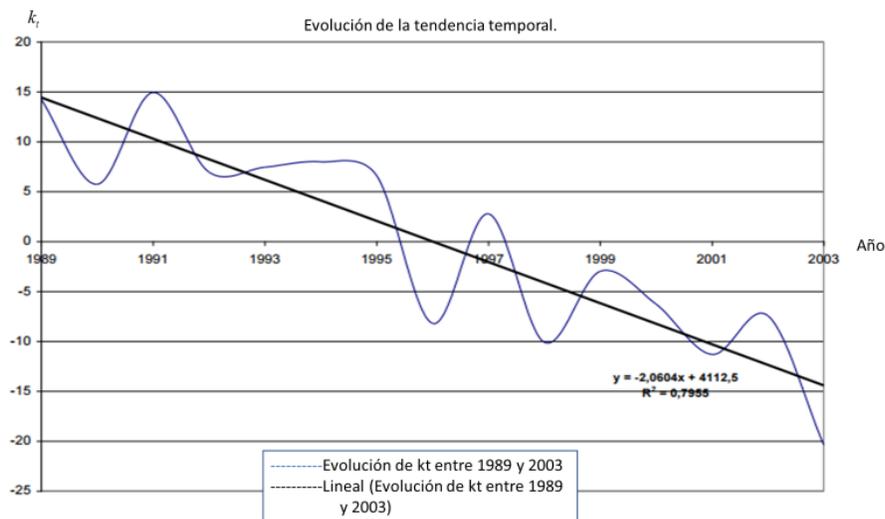
Queda por corregir $(\hat{\alpha}_x)$ para que la igualdad entre las muertes pronosticadas por el modelo y las muertes observadas siga siendo válida, lo que lleva a:

$$\alpha_x^* = \hat{\alpha}_x + \frac{\hat{\beta}_x}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} \hat{k}_t \quad (42)$$

El ritmo "típico" de los parámetros obtenidos es el siguiente, en primer lugar, para los parámetros dependientes de la edad:



Luego para el componente temporal:



1.5.3.2 Extrapolación del componente temporal

Queda entonces modelar la serie (k_t^*) para extrapolar las tasas futuras; para esto, generalmente se usa un modelo ARIMA (Siguiendo el enfoque de Box y Jenkins.), pero se puede usar cualquier otro modelo de series de tiempo. Sin embargo, dada la forma del gráfico anterior, el modelado más simple que se puede imaginar es, por ejemplo, una regresión lineal de estos coeficientes:

$$k_t^* = at + b + \varepsilon_t \quad (43)$$

con (ε_t) un ruido gaussiano blanco.

La estimación de los parámetros del modelo Lee-Carter requieren de una matriz rectangular completa de tasas de mortalidad (μ_{xt}^*) ; en la práctica, los valores brutos estimados son altamente inestables en las edades mayores debido a la escasa información disponible. Además, los datos

pueden no estar disponibles más allá de un cierto límite de edad. Existen varios métodos para completar la tabla antes de realizar el ajuste, o ex-post (estamos hablando de "cierre de la tabla de mortalidad"). Ver acerca de este tema en Denuit y Quashie [2005].

A modo de ilustración, presentamos aquí el método de Coale y Kisker (Coale y Kisker [1990]); el método consiste en extrapolar las tasas de mortalidad en las edades más antiguas (por ejemplo, hasta $x = 110$ años) según la fórmula (Omitimos aquí el índice t para aclarar las denominaciones):

$$\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{65} \times e^{g_x(x-65)} \quad (44)$$

g_x designando la tasa de crecimiento promedio de μ_x Entre 65 y x años. Los coeficientes g_x se calculan hasta una cierta edad, y luego se extrapolan para que las tasas μ_x puedan recomponerse. Coale y Kisker han observado empíricamente que las curvas g_x generalmente tienen un pico alrededor de 80 años antes de disminuir linealmente. Por eso propusieron la ecuación:

$$g_x = g_{80} + s \times (x - 80), \quad x \geq 80$$

Finalmente, la siguiente fórmula se puede usar para extrapolar las tasas de mortalidad instantánea más allá de los 80 años:

$$\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{x-1} \times e^{g_{80} + s(x-80)}, \quad x \geq 80$$

Se utilizan los siguientes valores de parámetros:

$$s = -\frac{\ln(\hat{\mu}_{79} + 31 \times g_{80})}{465} \quad \text{y} \quad g_{80} = \frac{\ln\left(\frac{\hat{\mu}_{80}}{\hat{\mu}_{65}}\right)}{15}$$

Por lo tanto, las tasas de mortalidad suavizadas a partir de los datos en bruto se obtienen directamente mediante el método de suavización de Lee-Carter para edades menores de 80 años. Para edades mayores o iguales a 80, si el muestreo no es lo suficientemente grande, se usa el método de Coale y Kisker's: este construye tasas de mortalidad en las edades mayores a partir de las tasas suavizadas (por Lee -Carter) a las edades de 65 y 80 años.

La cuestión de cerrar la tabla es importante en el caso de construir una tabla para las provisiones de la renta vitalicia. Cabe señalar, sin embargo, que esta importancia debe ponerse en revisión si los jubilados de muy alta edad se encuentran en una proporción pequeña de la cartera.

Por lo tanto, si evaluar el capital de una renta vitalicia en una cabeza a la edad de 75 años a una tasa del 2,5%, la tasa de mortalidad se considera estable a partir de la edad de 95 años (y que los sobrevivientes fallezcan a la edad de 120 años, solo aumentamos la provisión en un 0,7% (y de aproximadamente un 2,5% a los 85 años).

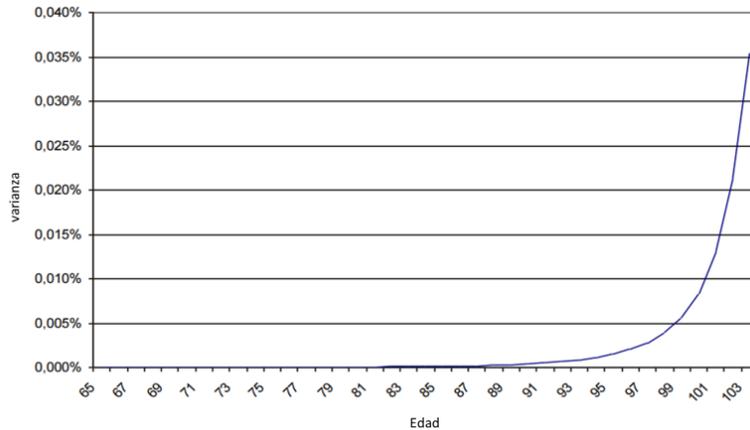
La brecha entre los dos métodos de cierre en términos de provisiones solo es realmente importante a edades muy altas (ver Delwarde y Denuit [2006]).

1.5.4 El modelo log-Poisson.

El modelo de Lee-Carter se basa en el supuesto de homocedasticidad de las tasas de mortalidad, que es una suposición sólida y poco realista: de hecho, la varianza de las tasas de mortalidad aumenta a edades altas, principalmente debido a la disminución del número de sobrevivientes.

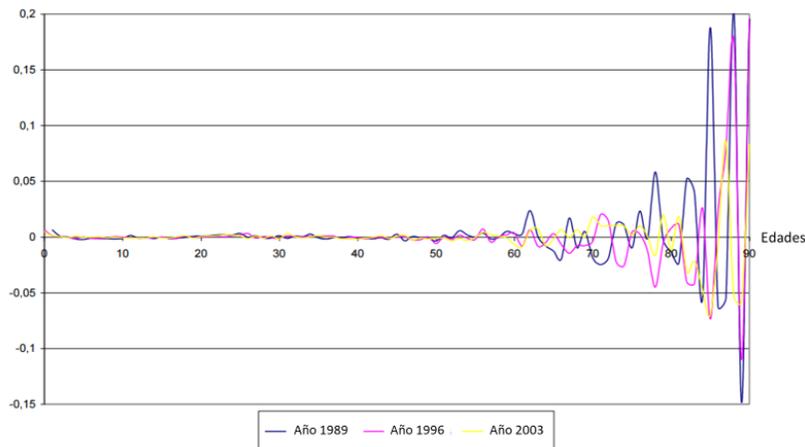
La varianza en las tasas brutas de mortalidad que observaríamos se aproxima a $\frac{q_x(1-q_x)}{L_x}$ y vemos la siguiente evolución:

Fig. Varianza en la tasa de mortalidad con la edad



Hay un aumento muy fuerte después de 85 años. Más directamente, cuando se realiza un ajuste mediante el método de Lee-Carter, se puede analizar la varianza de los residuos y comparar las observaciones con la hipótesis de heteroscedasticidad. Los gráficos se obtienen así (Lelieur [2005]):

Fig. Análisis de residuos en el modelo de Lee-Carter.



Además, el criterio utilizado en el método de Lee-Carter para estimar parámetros no es del tipo de "máxima verosimilitud".

También puede parecer natural modelar directamente el número de muertes en lugar de la tasa de mortalidad instantánea. Si D_{xt} denota el número de muertes a la edad x año t , y L_{xt} la exposición al riesgo, entonces D_{xt} es una variable aleatoria cuya esperanza se modelará proponiendo:

$$E(D_{xt}) = L_{xt} \times \mu_{xt} \quad (45)$$

El modelo log-Poisson, propuesto por Brouhns et al. [2002], es una adaptación del modelo Lee-Carter que integra estos diferentes elementos. Tenga en cuenta que la igualdad anterior es una

consecuencia directa del supuesto de constancia de μ_{xt} en cada cuadrado del diagrama de Lexis. De hecho, como la exposición al riesgo es igual a:

$$L_{xt} = \int_0^1 S(x+u, t+u) du \quad (46)$$

y que $S(x+u, t+u) = S(x, t) \exp\left(-\int_0^u \mu(x+v, t+v) dv\right)$, la constancia de μ_{xt} conduce a:

$$S(x+u, t+u) = S(x, t) \exp(-u \times \mu(x, t)) \quad (47)$$

después $L_{xt} = S(x, t) \int_0^1 \exp(-u \times \mu(x, t)) du$ y entonces:

$$L_{xt} = \frac{S(x, t)}{\mu(x, t)} (1 - \exp(-\mu(x, t))) = \frac{S(x, t)}{\mu(x, t)} q(x, t) \quad (48)$$

lo que establece el resultado.

La idea es modelar el número de muertes a la edad x año D_{xt} por una distribución de Poisson de parámetro $L_{xt}\mu_{xt}$ con $\mu_{xt} = (\alpha_x + \beta_x k_t)$. La expresión de la tasa de muerte instantánea es idéntica a la propuesta en el modelo de Lee-Carter, con la misma interpretación de los diferentes parámetros. En particular, el modelo será identificable solo con restricciones en los parámetros, y uno puede conservar los mismos que usaron Lee y Carter. Finalmente, podemos observar que pasar del modelo de Lee-Carter a este modelo de Poisson equivale a pasar de un modelo lineal a un modelo lineal generalizado con logaritmos como una función de enlace.

1.5.4.1 Estimación de parámetros

Como tenemos $P(D_{xt} = d) = \frac{(L_{xt}\mu_{xt})^d}{d!} \exp(-L_{xt}\mu_{xt})$ con $\mu_{xt} = \exp(\alpha_x + \beta_x k_t)$, la logoverosimilitud³ del modelo está escrito (con una constante aditiva):

$$\ln L(\alpha, \beta, k) = \sum_{xt} \{D_{xt} (\alpha_x + \beta_x k_t) - L_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x k_t)\} \quad (49)$$

Por lo tanto, tenemos una expresión simple de logoverosimilitud; las ecuaciones de probabilidad no tienen una solución analítica debido a la presencia del término no lineal $\beta_x k_t$ y deben resolverse numéricamente; por ejemplo, se puede usar un algoritmo de Newton-Raphson y usar el esquema propuesto en 1.5.3.1 anterior con la función objetivo F para cancelar el vector de puntajes $\left(\frac{\partial L}{\partial \alpha}, \frac{\partial L}{\partial \beta}, \frac{\partial L}{\partial k}\right)$; esto lleva aquí a las siguientes relaciones recurrentes:

³ Esto solo es una verosimilitud si usamos la data sobre riesgo real; si normalizamos los números a partir de un tamaño inicial de L_0 , obtenemos una pseudo-verosimilitud.

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_x^{i+1} &= \hat{\alpha}_x^i - \frac{\sum_t \left(D_{xt} - L_{xt} \exp\left(\hat{\alpha}_x^i + \hat{\beta}_x^i \hat{k}_t^i\right) \right)}{-\sum_t L_{xt} \exp\left(\hat{\alpha}_x^i + \hat{\beta}_x^i \hat{k}_t^i\right)} \\ \hat{k}_t^{i+1} &= \hat{k}_t^i - \frac{\sum_x \left(D_{xt} - L_{xt} \exp\left(\hat{\alpha}_x^{i+1} + \hat{\beta}_x^i \hat{k}_t^i\right) \right) \hat{\beta}_x^i}{-\sum_x \left(L_{xt} \exp\left(\hat{\alpha}_x^{i+1} + \hat{\beta}_x^i \hat{k}_t^i\right) \right) \left(\hat{\beta}_x^i\right)^2} \\ \hat{\beta}_x^{i+1} &= \hat{\beta}_x^i - \frac{\sum_t \left(D_{xt} - L_{xt} \exp\left(\hat{\alpha}_x^{i+1} + \hat{\beta}_x^i \hat{k}_t^{i+1}\right) \right) \hat{k}_t^i}{-\sum_t \left(L_{xt} \exp\left(\hat{\alpha}_x^{i+1} + \hat{\beta}_x^i \hat{k}_t^{i+1}\right) \right) \left(\hat{k}_t^{i+1}\right)^2}\end{aligned}$$

Los valores iniciales son libres, uno simplemente elegirá los valores $\hat{\beta}_x^0 \neq 0$ para evitar divisiones por 0. Para verificar las restricciones de identificabilidad, es necesario ajustar los parámetros así estimados, planteando:

$$\begin{aligned}k_t^* &= \left(\hat{k}_t - \frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} \hat{k}_t \right) \sum_x \hat{\beta}_x \\ \beta_x^* &= \frac{\hat{\beta}_x}{\sum_x \hat{\beta}_x}\end{aligned}\quad (50)$$

$$\alpha_x^* = \hat{\alpha}_x + \frac{\hat{\beta}_x}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} \hat{k}_t \quad (51)$$

Los valores estimados de los parámetros son muy similares a los obtenidos por el modelo Lee-Carter.

La extrapolación del componente de tiempo se realiza de la misma manera que en el modelo de Lee-Carter.

1.5.4.2 Obtención de intervalos de confianza.

En la práctica, las tablas construidas de esta forma generalmente se utilizarán para calcular la esperanza de vida residual, con el fin de obtener la vida de un pensionista (actual y futuro); más precisamente, se pueden utilizar para calcular activos que constituyen rentas vitalicias, de la forma:

$$a_{xt} = \sum_{i \geq 0} v^{i+1} \prod_{j=0}^i \exp(-\mu_{x+i,t+i}) \quad (52)$$

con $v = \frac{1}{1+r}$ como el factor de descuento. Más allá de la estimación puntual de a_{xt} que resulta del modelado de μ_{xt} , se desea medir la precisión asociada y, por lo tanto, obtener intervalos de confianza. Aquí se combinan dos fuentes de peligro, por un lado, las fluctuaciones de muestreo del

modelo de regresión de Poisson, y, por otro lado, la incertidumbre relacionada con la predicción de k_t para $t > t_M$.

La estimación de los parámetros del modelo (para $t \leq t_M$) por el método de máxima verosimilitud permite concluir que el vector $(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{k}_t)$ está distribuido asintóticamente según una distribución normal. Luego podemos construir intervalos de confianza para funciones como a_{xt} mediante el siguiente método de simulación:

- se genera una realización $(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{k}_t)$ a partir de la ley normal;
- a partir de la realización anterior, estimamos los parámetros de proyección del modelo ARIMA asociado con k_t ;
- simulamos una trayectoria de k_t para $t > t_M$
- De los elementos así calculados, se determina el logro de la variable de interés (por ejemplo, a_{xt})

La renovación de la operación produce una distribución empírica de la variable de interés y, en particular, un intervalo de confianza.

Cuando el tamaño de la muestra es muy grande, se puede considerar que las fluctuaciones de muestreo se vuelven insignificantes y eliminar el primer paso del algoritmo.

Este tipo de aplicación se desarrollará más adelante en el contexto de los modelos de mortalidad estocástica.

1.5.5 Modelos logó-lineales

En la elección de un modelo que puede estructurar un conjunto de datos históricos, la "flexibilidad" del modelo y, por lo mismo, su fidelidad a los datos está directamente relacionada con la cantidad de parámetros introducidos. La elección de un modelo muy flexible es a menudo a expensas de sus cualidades predictivas (un modelo totalmente no paramétrico no permite ninguna predicción).

Los modelos de Lee-Carter o Log-Poisson pueden por lo tanto aparecer muy parametrizados. Además, en el contexto de los datos de la cartera, que es significativamente menor que lo que se puede lograr como tamaño de la población en riesgo, el alto número de parámetros del modelo puede llevar a irregularidades resultantes de las fluctuaciones de muestreo. Este fenómeno se destaca en Lelieur [2005].

En este contexto, puede ser útil recurrir a modelos alternativos, menos parametrizados que involucran expresiones analíticas relacionadas con edades o años (o ambos).

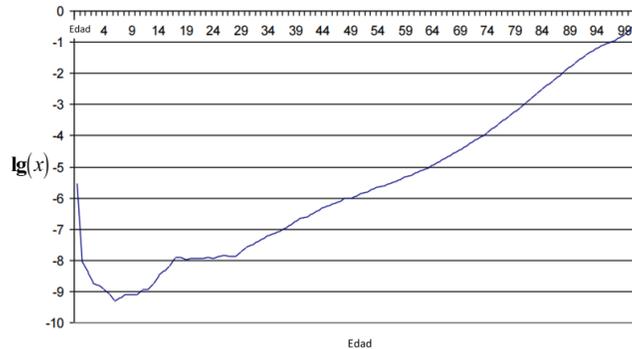
Además, las influencias de la edad x y el año t en las tasas de mortalidad $q_x(t)$ se expresan a través de logit:

$$\mathbf{lg}(q_{xt}) = \mathbf{lg}(t) = \mathbf{ln}(q_{xt} / (1 - q_{xt})) \quad (53)$$

El logit para bajas tasas de mortalidad es poco diferente de la variable de Lee-Carter $\mathbf{ln}(\mu_{xt})$, pero puede ser significativamente diferente para edades altas. Tiene la ventaja de variar en $]-\infty, +\infty[$, lo

que simplifica la implementación del modelo de regresión. La forma típica de un logit es la siguiente (obtenida con OMS 2001-2017):

Fig. Logit de tasa de mortalidad por edad.



De esta forma se nos lleva a introducir modelos log-lineales. El modelo básico de esta familia impone una tendencia lineal en función del tiempo:

$$\mathbf{lg}_x(t) = \alpha_x + \beta_x \times t + \varepsilon_{xt} \quad (54)$$

Asumimos los residuos iid (y, por lo tanto, homoscedásticos), lo que nos permite utilizar los resultados estándar del modelo lineal ordinario (con el año calendario t como variable explicativa, x fija). Esta parametrización es similar a la del modelo Lee-Carter en el que habríamos supuesto $k_i = t$ y reemplazado a $\ln(\mu_{xt})$ por $\mathbf{lg}_x(t)$. Hay expresiones explícitas para los parámetros. De hecho, recordando que en el modelo lineal $y_i = ax_i + b + \varepsilon_i$ tenemos:

$$\hat{a} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \times \bar{y}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2} = \frac{\mathbf{cov}(x, y)}{\mathbf{cov}(x)} \quad \text{y} \quad \hat{b} = \bar{y} - \hat{a} \bar{x} \quad (55)$$

con $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ las expresiones de los coeficientes α_x y β_x se obtienen fácilmente.

Encontramos empíricamente una correlación muy fuerte entre la serie (α_x) y β_x , lo que lleva a proponer una variante del modelo en el que estos dos coeficientes están vinculados por una relación afin; esto lleva al siguiente modelo:

$$\mathbf{lg}_x(t) = a\beta_x + b + \beta_x \times t + \varepsilon_{xt} \quad (56)$$

El número de parámetros para estimar disminuye significativamente a $2 + x_M - x_m + 1$ en lugar de $2 \times (x_M - x_m + 1)$ en el modelo anterior y $2 \times (x_M - x_m + 1) + t_M - t_m - 1$ en el modelo de Lee-Carter. Sin embargo, el problema de los mínimos cuadrados se vuelve no lineal, lo que complica un poco la estimación de los parámetros⁴. En la práctica, se debe recurrir a métodos numéricos,

⁴ Lo que debe hacerse globalmente y no por edad.

mientras que en la primera versión del modelo se tiene una expresión explícita directa de los parámetros.

La derivada lineal puede parecer poco realista a largo plazo, y vemos, por ejemplo, en los datos de EE. UU. una desaceleración en la tendencia. Esto nos lleva a buscar modelos para introducir a nivel de pronósticos a muy largo plazo información exógena que refleje una disminución predecible de la derivada. Esto se puede lograr con los siguientes modelos:

$$\mathbf{lg}_x(t) = \alpha_x + \beta_x \times t + \gamma_x \times t^\delta + \varepsilon_{xt} \quad (57)$$

En estos modelos, las estimaciones también muestran una correlación muy fuerte entre las estimaciones de los parámetros (α_x) , (β_x) y (γ_x) , lo que nos lleva a proponer dos nuevos modelos haciendo $\alpha_x = a\gamma_x + b$ y $\beta_x = c\gamma_x + d$ y esto nos lleva a la especificación:

$$\mathbf{lg}_x(t) = b + dt + \gamma_x(t^\delta + ct + a) + \varepsilon_{xt} \quad (58)$$

La resolución numérica del criterio de mínimos cuadrados asociados no requiere ningún comentario en particular.

1.5.6 El modelo logístico no convencional

Consideramos aquí el modelo propuesto por Bongaart [2004] y definido por:

$$\mu_{xt} = \frac{\alpha(t) \exp(\beta x)}{1 + \alpha(t) \exp(\beta x)} + \gamma(t) \quad (59)$$

Como el reverso de la función logística $\mathbf{lg}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ es $y \rightarrow \frac{e^y}{1+e^y}$, deducimos de ello escribiendo:

$$\mu_{xt} - \gamma(t) = \frac{\exp(\beta x + \delta(t))}{1 + \exp(\beta x + \delta(t))} \quad (60)$$

con $\delta(t) = \ln(\alpha(t))$ este modelo también se puede escribir:

$$\mathbf{lg}(\mu_{xt} - \gamma(t)) = \beta x + \ln(\alpha(t)) \quad (61)$$

Este modelo es una generalización del modelo de Makeham (Makeham [1860])

$\mu_x = \alpha \exp(\beta x) + \gamma$ propuesto por Thatcher [1999] al plantearse $\mu_x = \frac{\alpha \exp(\beta x)}{1 + \alpha \exp(\beta x)} + \gamma$ que se

adapta al caso de tasa de muerte no constante en el tiempo. Este ajuste del modelo de Makeham está motivado originalmente por el deseo de corregir la sobreestimación de las altas tasas de mortalidad condicional observadas en la práctica.

El hecho de que sea independiente del tiempo es la consecuencia del hecho de que uno encuentra empíricamente que este parámetro depende poco del tiempo.

La estimación de los parámetros se puede realizar mediante un método de mínimos cuadrados no

lineales minimizando $\varepsilon = \sum_{x,t} n_{xt} \frac{(\hat{q}_{xt} - q_{xt})^2}{q_{xt}}$ con n_{xt} como la exposición al riesgo para la edad y el

año considerados⁵. Una vez que el modelo se ajusta a valores pasados, la extrapolación de la mortalidad futura se basa en una extrapolación, utilizando técnicas de series de tiempo, de los coeficientes $\alpha(t)$ y $\gamma(t)$. Esta parametrización tiene la ventaja de estar menos restringida en la dimensión temporal que Lee-Carter o log-Poisson, y la extrapolación se basa en 2 parámetros y no solo en uno.

El cálculo de q_x en función de $\mu_x = \frac{\alpha \exp(\beta x)}{1 + \alpha \exp(\beta x)} + \gamma$ se efectúa vía:

$$q_x = 1 - \exp\left(-\int_x^{x+1} \mu(u) du\right) = 1 - \exp\left(\int_x^{x+1} \left(\frac{\alpha \exp(\beta u)}{1 + \alpha \exp(\beta u)} + \gamma\right) du\right) \quad (62)$$

Al poner $v_{\alpha,\beta}(u) = 1 + \alpha \exp(\beta u)$, observamos que $\frac{\alpha \exp(\beta u)}{1 + \alpha \exp(\beta u)} du = \frac{1}{\beta} \frac{dv}{v}$, lo que lleva, después de algunas manipulaciones, a:

$$q_x = 1 - e^{-\gamma} \left[\frac{v_{\alpha,\beta}(x)}{v_{\alpha,\beta}(0)} \right]^{\frac{1}{\beta}} \quad (63)$$

En otras palabras, la función de supervivencia de este modelo es $S(x) = e^{-\gamma x} \left(\frac{v_{\alpha,\beta}(x)}{v_{\alpha,\beta}(0)} \right)^{\frac{1}{\beta}}$. El

término "modelo de compensación" está motivado por la siguiente observación: si consideramos solo el componente de la tasa de mortalidad asociada con el envejecimiento,

$$\mu_{xt}^s = \frac{\alpha(t) \exp(\beta x)}{1 + \alpha(t) \exp(\beta x)} \quad (64)$$

Así que por un año t_0 fijo podemos escribir para $t \geq t_0$:

$$\mu_{xt}^s = \frac{\alpha(t_0) \exp(\beta(x - \wedge(t)))}{1 + \alpha(t_0) \exp(\beta(x - \wedge(t)))} \quad (65)$$

$$\text{con } \wedge(t) = \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(t_0)}\right)$$

1.5.7 Uso de series de tiempo

⁵ En la práctica, este criterio está cerca de una máxima verosimilitud discretizada

El modelo de Lee-Carter, después de ajustar los parámetros históricos α, β y k , propone considerar la secuencia de k_t como una serie de tiempo para obtener los valores prospectivos de las tasas. Por lo tanto, planteamos:

$$k_t^* = at + b + \varepsilon_t \quad (66)$$

Este enfoque se puede transponer en el contexto de los modelos logísticos, con el fin de reducir el número de parámetros. Luego intentamos parametrizar la función $x \rightarrow \mathbf{lg}_x(t)$ para tener en cuenta la influencia del año t de una manera no paramétrica, y luego modelar por segunda vez las series de tiempo introducidas. Así, consideramos un modelo de la forma:

$$\mathbf{lg}_x(t) = f(x, \theta_t) + \varepsilon_{xt} \quad (67)$$

donde se elige la función $f(x, \theta_t)$, por simplicidad de implementación, argumentos lineales con respecto al parámetro (vectorial) θ_t . En una segunda fase se modela la serie (θ_t) .

La forma elegida para f es la de una spline cúbica con nodos en edades $(x_i, i = 1, \dots, p)$. La forma de la función f con p nodos es entonces:

$$f(x, a, b, c, d, e_1, \dots, e_p) = a_t + b_t x + c_t x^2 + d_t x^3 + \sum_{i=1}^p e_{i,t} \left[(x - x_i)^+ \right]^3 \quad (68)$$

En la práctica, una versión simplificada de este modelo en la que solo el parámetro a_t depende del tiempo proporciona resultados confiables. Al observar que la modelación de a_t a través de una regresión lineal similar a la realizada para k_t , podemos construir una versión totalmente paramétrica del modelo proponiendo:

$$f(x, a, b, c, d, e_1, \dots, e_p) = a + \lambda t + bx + cx^2 + dx^3 + \sum_{i=1}^p e_i \left[(x - x_i)^+ \right]^3 \quad (69)$$

1.5.8 Modelos con referencia externa.

Si no tenemos datos suficientes para estructurar correctamente la tabla completa, podemos imaginarnos utilizando la estructura de una tabla de referencia existente y simplemente ubicar la mortalidad del grupo considerado en relación con esta referencia.

Se pueden usar dos enfoques para alcanzar este objetivo, se presentan brevemente a continuación.

1.5.8.1 Regresión logística

Cuando se desea colocar una tabla con respecto a otra, puede parecer natural la regresión de los logits de las tasas brutas en los logits de la tabla de referencia, lo que lleva al siguiente modelo, propuesto inicialmente en Brass [1971]:

$$\ln(q_{xt} / (1 - q_{xt})) = a \times \ln(q_{xt}^{ref} / (1 - q_{xt}^{ref})) + b \quad (70)$$

con $q_{xt} = q_{xt}(a, b)$ la tasa de mortalidad de experiencia, o:

$$\mathbf{lg}_x(t) = a \times \mathbf{lg}_x^{ref}(t) + b \quad (71)$$

La estimación de los parámetros a y b se realiza minimizando una función de pérdida como:

$$\varphi(a, b) = \sum_{x,t} E_{x,t} \times (q_{xt}(a, b) - \hat{q}_{xt})^2 \quad (72)$$

que es la generalización natural del criterio de máxima verosimilitud en un modelo discreto o de otros criterios, como:

$$\varphi(a, b) = \sum_x \left| \sum_t E_{x,t} \times q_{xt}(a, b) - D_{x,t} \right| + \sum_t \left| \sum_x E_{x,t} \times q_{xt}(a, b) - D_{x,t} \right| \quad (73)$$

Permite, además, una extrapolación fácil de los logits de las tasas de experiencia en los rangos de edad para los cuales los datos del experimento serían insuficientes.

Podemos adaptar el criterio de optimización utilizado para tener en cuenta el contexto de uso de las tablas al retener:

$$(\hat{a}, \hat{b}) = \mathbf{argmin} \left[e_{60}^{suavizado}(a, b) - e_{60}^{no\ suavizado} \right] \quad (74)$$

bajo la siguiente restricción:

$$e_{60}^{suavizado}(a, b) - e_{60}^{no\ suavizado} > 0$$

donde $e_{60}^{suavizado}(a, b)$ se refiere a la esperanza de vida residual a los 60 años, una función de los parámetros a y b , calculada a partir de la regresión en logits y $e_{60}^{no\ suavizado}$ que designa la esperanza de vida residual a 60 años calculada a partir de datos en bruto. Entonces perdemos el carácter explícito de la expresión de los parámetros. El detalle del enfoque se encuentra en Lelieur [2005].

También podemos usar $\mathbf{lg}_x(t) = a_x \mathbf{lg}_x^{ref}(t) + b_x$ como una variante con coeficientes dependiendo de la edad (o el año).

Finalmente, podemos observar que cuando $\ln(q_{xt}^{ref} / (1 - q_{xt}^{ref})) = \alpha_x + \beta_x \times k_t$, es decir, si la estructura de mortalidad subyacente está descrita por un modelo de Lee-Carter, entonces:

$$\ln(q_{xt} / (1 - q_{xt})) = a \times (\alpha_x + \beta_x \times k_t) + b = (a \times \alpha_x + b) + a \times \beta_x \times k_t \quad (75)$$

de esta forma, el modelo ajustado también es del tipo Lee-Carter con la misma tendencia temporal. Solo el coeficiente de sensibilidad β_x se transforma en $a \times \beta_x$. De esta manera, se realiza un posicionamiento de nivel de la mortalidad de la experiencia, la tendencia de la referencia se reutiliza directamente.

1.5.8.2 Posicionamiento frente a una referencia externa

También es posible buscar, en un conjunto de tablas prospectivas exógenas disponibles, el período de las tablas de referencia $[t, t + h]$ más "cercano" al período $[t^{ex}, t^{ex} + h]$, resultante de los datos experimentales. Esto lleva al uso de tablas exógenas como tablas de experiencia.

La noción de "el más cercano" implica el uso de una distancia entre dos tablas.

Diferentes enfoques son posibles a este nivel: $Khi-2$ en $q_x(t)$, distancia deducida de las expectativas residuales o sus integrales (lo que representa una unidad monetaria cercana al compromiso de una cartera de anualidades donde todas las edades son equi-representadas y con una tasa técnica nula) la ventaja de este indicador es el "lavado" de las fluctuaciones.

1.6 Criterios de validación del modelo

Los criterios de validación del modelo proporcionan apoyo a la decisión para la selección del modelo más relevante. La relevancia se evalúa aquí en relación con el contexto de uso de las tablas propuestas: el que generalmente es la valoración de los compromisos de las rentas vitalicias para las tablas prospectivas.

Esto lleva, en particular, a prestar especial atención a la representación de la esperanza de vida residual.

1.6.1 Fidelidad de datos

El primer requisito de un modelo es ser fiel a los datos utilizados para calibrarlo. Esta fidelidad puede ser examinada a priori de dos maneras:

1. A través de las tasas de mortalidad $q_x(t), (x, t) \in [x_0, x_1] \times [a_0, a_1]$;
2. A través de la expectativa de supervivencia residual en el rango $[x_0, x_1]$, definido por:

$$e_t(x, x_1) = E[\mathbf{min}(X - x, x_1 - x) | X > x]$$

El segundo criterio está motivado por el hecho de que el uso de las tablas a futuro está orientado principalmente hacia el cálculo de los compromisos de las rentas vitalicias. Las expectativas de supervivencia residual representan los pasivos asociados con el cálculo de anualidades con una tasa de descuento de cero. La auditoría de las expectativas condicionales es, por lo tanto, inevitable.

Los modelos menos parametrizados son en principio y en general los más fieles.

Sin embargo, esta lógica estadística no siempre se respeta si la calibración se realiza en $\mathbf{lg}_x(t)$ o en $\mathbf{ln}(\mu_{xt})$ y no en los elementos seleccionados para evaluar la fidelidad del modelo (tasa de mortalidad $q_x(t)$ y la expectativa residual $e_t(x, x_1)$). Sin embargo, antes de la implementación real, se pueden hacer los siguientes comentarios:

- El modelo de Lee-Carter puede llevar a subestimar significativamente las tasas de mortalidad en edades altas (de 85 a 90 años). De hecho, el algoritmo de referencia basado en un enfoque de máxima verosimilitud favorece las primeras edades (las más "jóvenes") y, además, la relación $\mu_{xt} = -\mathbf{ln}(1 - q_{xt})$ se basa en el supuesto de tasa constante instantánea de las muertes entre dos edades completas, hipótesis cuestionable a edades altas.
- Se puede esperar que los modelos menos parametrizados coincidan mejor con las "irregularidades residuales" de los datos sin procesar, lo que es un obstáculo adicional ya que el volumen de datos es limitado.
- En el nivel de las expectativas residuales, las irregularidades de las tablas sin procesar y las tablas ajustadas se destruyen clásicamente y muestran solo las posibles y sistemáticas desviaciones de los modelos en el q_x .

Se puede observar en este punto que para evitar tener que usar la "fórmula de paso" $\mu_{xt} = -\ln(1 - q_{xt})$ en el modelo de Lee-Carter, es posible modelar directamente $\lg_x(t)$ en lugar de $\ln(\mu_{xt})$ escribiendo:

$$\ln\left(\frac{q_{xt}}{1 - q_{xt}}\right) = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{xt} \quad (76)$$

1.6.2 Comparación de valores modelados y observaciones.

La comparación entre la cantidad de salidas observadas y la cantidad de salidas estimadas por el modelo en un intervalo $[x, x + 1[$ o un bloque $[x, x + 1[\times [t, t + 1[$ es una herramienta central de La validación de una ley de experiencia y la apreciación de su nivel de prudencia.

El conteo de resultados observado no plantea un problema y simplemente implica la definición de una convención de redondeo. La parte completa del tiempo de salida es la más utilizada. El número de salidas estimado por el modelo es simplemente la expectativa de la variable aleatoria "número de salidas"; con notaciones obvias, tenemos, limitándonos al intervalo⁶ $[x, x + 1[$:

$$P(D_i = 1) = \int_e^{x+1} \left(1 - \frac{S_X(c)}{S_X(e)}\right) F_c dc \quad (77)$$

Suponiendo la constancia de la función aleatoria en este intervalo, $1 - \frac{S_X(c)}{S_X(e)} = 1 - e^{-\mu_x \times (c-e)}$; para

evitar la intervención explícita de la ley de censura $F_c(dc)$ en el cálculo, asumimos μ_x lo suficientemente pequeño para $1 - e^{-\mu_x \times c - e} \approx \mu_x (c - e)$ entonces:

$$P(D_i = 1) = \mu_x \times \int_e^{x+1} (c - e) F_c(dc) \quad (78)$$

Por lo tanto, se escribe el número esperado de salidas en el intervalo $[x, x + 1[$, asumiendo la constancia de la función aleatoria durante este intervalo y utilizando una aproximación afín de la función de supervivencia, válida cuando la probabilidad μ_x es pequeña,

$E(D) = \sum_{i=0}^n P(D_i = 1) = \mu_x \times E(x)$; utilizando la probabilidad de salida condicional ajustada, por lo que tendremos:

$$E(D) = -\ln(1 - q(x)) \times E(x) \quad (79)$$

Podemos evitar suponer que μ_x es pequeño y, por lo tanto, solo usar la hipótesis de constancia de la función de riesgo usando:

⁶ Lo que significa que trabajamos con la ley X truncada a la izquierda en x y la censura es como máximo igual a $x + 1$.

$$E(D) \approx \sum_{i=1}^n \left(1 - e^{-\mu_x \times (T_i - E_i)}\right) = \sum_{i=1}^n \left(1 - (1 - q(x))^{(T_i - E_i)}\right) \quad (80)$$

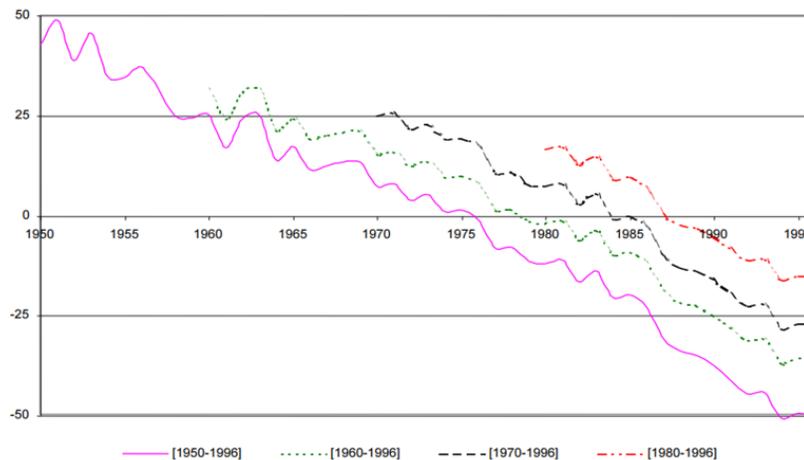
Cuando la probabilidad de salida condicional es pequeña, esta expresión se convierte en $E(D) = q(x) \times E(x)$, una fórmula utilizada a menudo por los profesionales.

1.6.3 Estabilidad de las estimaciones.

La elección del rango de edad y el rango de años a partir de los cuales se deben generar los pronósticos es importante ya que las estimaciones de los parámetros dependen sustancialmente de esta elección. De hecho, es posible que estas diferencias, si existen, den lugar a diferentes pronósticos.

Para estimaciones de edad, la elección del rango de edad no debería tener un impacto significativo en las estimaciones. Por ejemplo, si consideramos el rango [50 a 70 años] y el rango [60 a 80], las edades comunes (60 a 70 años) deben tener estimaciones similares. Este no es el caso en los modelos Lee-Carter y log-Poisson:

Fig. Tendencias estimadas en Lee-Carter según el período de observación.



Para los modelos en los que se realizan estimaciones de edad en edad, la naturaleza de los modelos garantiza la igualdad de estimaciones al variar el rango utilizado. Para los otros modelos que toman en cuenta todas las edades que constituyen un rango, se debe tener en cuenta que las estimaciones de los parámetros dependen (más o menos fuertemente) del rango de estudio elegido. Sin embargo, es de esperar que esta inestabilidad no altere las estimaciones de logits, tasas de mortalidad y expectativas residuales dadas las cualidades de fidelidad de los modelos.

Para el modelo de Lee-Carter (el menos parametrizado en edades), la restricción de identificación $\sum \beta_x = 1$ tiene la consecuencia mecánica de las diferencias entre las estimaciones limitadas a las traslaciones.

9.6.4 Capacidad prospectiva

Se puede observar que, en general, la capacidad de un modelo para un uso prospectivo es tanto más importante que el modelo es altamente paramétrico.

Esta observación lleva a privilegiar los enfoques paramétricos.

1.7 La muerte como primer momento de alcanzar un umbral a través de un proceso.

Se puede usar un enfoque alternativo para modelar la supervivencia; Este enfoque se utiliza en general para poblaciones no humanas (insectos en particular). Consiste en modelar un "proceso vital" mediante un proceso de difusión, y considerar que la muerte ocurre cuando el nivel del proceso vital disminuye demasiado y cruza un cierto umbral; En un cambio de escala, siempre podemos suponer que este umbral es cero⁷.

1.7.1 Presentación del modelo.

El modelo más simple que uno puede imaginar es:

$$dS_i(t) = -\mu dt + \sigma dW_i(t) \quad (81)$$

donde el índice i se refiere a la cabeza considerada, y la W_i son movimientos brownianos independientes. Dado el nivel de "viabilidad" inicial, $S_0 = x > 0$, la probabilidad de morir entre t y $t + dt$ es igual a la probabilidad de que el browniano con la derivada de arriba alcance el origen por primera vez en el instante t , que es:

$$p_x(t) = \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \exp\left(-\frac{(x - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right) \quad (82)$$

Para una distribución inicial de las viabilidades de densidad ω_0 , obtenemos que el número de muertes en la fecha t es $D(t) = \int_0^{+\infty} p_x(t) \omega_0(x) dx$, lo que conduce a la siguiente expresión de la tasa de muerte instantánea:

$$\mu(t) = \frac{D(t)}{N_0 - \int_0^t D(s) ds} \quad (83)$$

Se puede demostrar que en el caso de una población inicialmente homogénea ($x = 1$ para todos los individuos en la población), entonces la tasa de mortalidad instantánea admite una expresión analítica.

1.7.2 Estimación de parámetros

La estimación de máxima verosimilitud no plantea ninguna dificultad particular y nos conduce a:

$$\hat{\mu} = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i \right)^{-1} = \frac{1}{T} \quad (84)$$

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T} \right) \right)^{1/2} \quad (85)$$

⁷ Uno puede imaginar el modelado dual de un proceso de "morbilidad" que, cuando supera un cierto umbral, provoca la muerte.

Este tipo de enfoque hace posible explotar los numerosos resultados existentes en los tiempos de alcanzar un umbral mediante el movimiento browniano con la derivada.

Bibliografía

Brass W. [1971] «On the Scale of Mortality», Biological aspects of demography, W. Brass (ed.), Londres, Taylor and Francis, 69-110.

Bongaarts J. [2004] «Long-Range Trends in Adult Mortality : Models and Projection Methods », Population Council, n°194.

Brouhns N., Denuit M. [2002], «Risque de longévité et rentes viagères : II. Tables de mortalité prospectives pour la population belge », BAB.

Brouhns N., Denuit M. [2002], «Risque de longévité et rentes viagères : I. Evolution de la mortalité en Belgique de 1880 à nos jours », BAB.

Brouhns N., Denuit M., Vermunt J.K. [2002], «A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables », IME.

Coale A., Kisker E.E. [1990]. «Defects in data on old age mortality in the united states: New procedures for calculating approximatively accurate mortality schedules and life tables at the highest ages ». Asian and Pacific Population Forum 4, 1-31.

Czado C., Delwarde A., Denuit M. [2004], «bayesian poisson log-bilinear mortality projections»

Debon A., Martinez-Ruiz F., Montes F. [2004], «Dynamic Life Tables: A Geostatistical Approach», IME Congress

Denuit M., Quashie A. [2005], «Modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges». Institut des Sciences Actuarielles et Institut de Statistique Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique.

Denuit M., Magis C., Walhin F. [2004], «La mortalité, un phénomène en pleine mutation: ¿quelle solution pour le marché des rentes?», Working Paper.

Fraser H.B., Weitz J. S. [2003], «Explaining Mortality Rate Plateaus», Proc. Nat. Acad. Sci.

Guibert Q., Planchet F. [2017] «Utilisation des estimateurs de Kaplan-Meier par génération et de Hoem pour la construction de tables de mortalité prospectives», Document de travail, ISFA.

Haderer M. [2003], « Réassurance du risque de longévité », ISFA, Mémoire d'actuariat.

Lelieur V. [2005] «Construction de tables de mortalité prospectives: le cas des petites populations», ISFA, Mémoire d'actuariat.

Planchet F. [2006] «Tables de mortalité d'expérience pour des portefeuilles de rentes – note de presentación», Publication de l'Institut des Actuaire.

Renshaw A.E. [1991] «Actuarial graduation practice and generalized linear and non-linear models», Journal of the Institute of Actuaries, vol. 118, pp. 295–312.

Sithole T., Haberman S., Verrall R.J. [2000] «An investigation into parametric models for mortality projections, with applications to immediate annuitants and life office pensioners», Insurance: Mathematics and Economics, vol. 27, pp. 285–312.

Thatcher A.R. [1999] «The Long-term Pattern of Adult Mortality and the Highest Attained Age.», Journal of the Royal Statistical Society 162 Part 1: 5-43.

Thatcher A.R., Kannisto V., Vaupel J.W. [1998]. The Force of Mortality at Ages 80 to 120. Odense: Odense University Press.